Solución Prueba de Evaluación Continua_2 (PEC2)

Presentación

Esta PEC consta de 5 problemas que evalúan los conceptos adquiridos en el módulo 2.

Competencias

1. Conocimiento de materias básicas i tecnologías, que capaciten para el aprendizaje de nuevos métodos y nuevas tecnologías, y doten al estudiante de una gran versatilidad para adaptarse a nuevas situaciones.
2. Comprensión y dominio de los conceptos básicos de sistemas lineales y las funciones i transformaciones relacionadas, y su aplicación para la resolución de problemas propios de la ingeniería.
3. Capacidad para analizar, codificar, procesar i transmitir información multimedia empleando técnicas de procesamiento analógico i digital de la señal.

Objetivos

1. Calcular la DFT y DFT inversa.
2. Conocer la relación entre la DFT y la Transformada discreta de Fourier
3. Analizar las principales propiedades de la DFT y la DFT inversa.
4. Aplicar las ecuaciones de la DFT para resolver cálculos de transformadas.
5. Resolver la convolución lineal mediante la DFT

Descripción de la PEC a realizar

Resolver los problemas propuestos

Recursos

Problemas resueltos del módulo 2 que se encuentran en el foro.

Las guías de estudio del módulo 2 y el libro Oppenheim.

Formato y fecha de entrega

Se entregará editada y/o escaneada en un único archivo en formato PDF, con el siguiente nombre: apellidos_nombre_PEC2.pdf

Problema 1 (1.6 puntos)

Calcula

a) Usando las definiciones de la transformada discreta de Fourier (DFT) y la transformada discreta inversa de Fourier (IDFT):

(a1) La DFT de la secuencia x[n] = (2, 1, 0, 2, 0, 1)

(a2) La IDFT de X = (10, -1-3j, 0, -1+3j)

b) Usando la notación matricial

(b1) La DFT de x[n] = (4, 0,1)

(b2) La IDFT de X = (j, -4)

a1) La DFT de 6 muestras de la secuencia x[n] = (2, 1, 0, 2, 0, 1) es

$$X_6[k]=\sum_{n=0}^{5}x[n]e^{-j\frac{2\pi nk}{6}}=2.e^{-j\frac{2\pi k0}{6}}+1.e^{-j\frac{2\pi k1}{6}}+0.e^{-j\frac{2\pi k2}{6}}+2.e^{-j\frac{2\pi k3}{6}}+0.e^{-j\frac{2\pi k4}{6}}+1.e^{-j\frac{2\pi k5}{6}}=$$

$$=2+e^{-j\frac{\pi k}{3}}+2e^{-j\pi k}+e^{-j\frac{5\pi k}{3}}$$

Dando valores a k entre 0 y 5, resulta:

$$X_6[0]=2+1+2+1=6$$

$$X_6[1]=2+\cos(\frac{\pi}{3})-j\sin(\frac{\pi}{3})-2+\cos(\frac{5\pi}{3})-j\sin(\frac{5\pi}{3})=\cos(\frac{\pi}{3})+\cos(\frac{5\pi}{3})=1$$

$$X_6[2]=4-\frac{1}{2}--\frac{1}{2}=3$$

$$X_6[3]=2-1-2-1=-2$$

$$X_6[4]=4-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=3$$

$$X_6[5]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

X6[k]=(6, 1, 3, -2, 3, 1)

a2) La IDFT de X = (10, -1-3j, 0, -1+3j)

La secuencia tiene duración N=4,

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{1}{4}\left(X[0].e^{j\frac{2\pi}{4}0n}+X[1].e^{j\frac{2\pi}{4}1n}+X[2].e^{j\frac{2\pi}{4}2n}+X[3].e^{j\frac{2\pi}{4}3n}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(10+(-1-3j).e^{j\frac{2\pi}{4}1n}+0.e^{j\frac{2\pi}{4}2n}+(-1+3j).e^{j\frac{2\pi}{4}3n}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(10+(-1-3j)(\cos\frac{\pi n}{2}-j\sin\frac{\pi n}{2})+(-1+3j)(\cos\frac{3\pi n}{2}-j\sin\frac{3\pi n}{2})\right)=$$

Calculando los valores de x[n] para n=0,1,2,3, resulta

x[0]= ¼(10-1-3j-1+3j)=8/4=2

x[1]= ¼(10+(-1-3j)j+(-1+3j)(-j)) = ¼ (10-j+3+j+3)=4

x[2]= ¼ (10+1+3j+1-3j) = 3

x[3]= ¼ (10+j-3-j-3)=1

x[n] = (2, 4, 3, 1)

b1) La DFT de 3 puntos de x[n] = { 4, 0 , 1 }

La matriz para el cálculo de la DFT de N=3 muestras es

$$M=\begin{bmatrix} e^{-j\frac{2\pi 00}{3}} & e^{-j\frac{2\pi 01}{3}} & e^{-j\frac{2\pi 02}{3}} \\ e^{-j\frac{2\pi 10}{3}} & e^{-j\frac{2\pi 11}{3}} & e^{-j\frac{2\pi 12}{3}} \\ e^{-j\frac{2\pi 20}{3}} & e^{-j\frac{2\pi 21}{3}} & e^{-j\frac{2\pi 22}{3}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$e^{-j\frac{2\pi}{3}}=\cos\frac{2\pi}{3}-j\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e^{-j\frac{4\pi}{3}}=\cos\frac{4\pi}{3}-j\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e^{-j\frac{8\pi}{3}} = \cos\frac{8\pi}{3} - j\sin\frac{8\pi}{3} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$X = Mx \Rightarrow \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X[0] = 4 + 0 + 1 = 5$$
$$X[1] = 3.5 + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$X[2] = 3.5 - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$X[k] = (5, \frac{7}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{7}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})$$

b2) La matriz para el cálculo de la IDFT de N=2 muestras es

$$M^H = \begin{bmatrix} e^{j\frac{2\pi 00}{2}} & e^{j\frac{2\pi 01}{2}} \\ e^{j\frac{2\pi 10}{2}} & e^{j\frac{2\pi 11}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{1}{2}M^H X \Rightarrow \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + \frac{1}{2}j \\ 2 + \frac{1}{2}j \end{bmatrix}$$

$$x[n] = \left(-2 + \frac{1}{2}j, 2 + \frac{1}{2}j\right)$$

Problema 2 (2,4 puntos)

a) Si la longitud de $x[n]$ es N=4, y su DFT de 8 puntos es

$$X = \left\{10,\ 6\text{-}2\sqrt{2}j,\ 6,\ 6-2\sqrt{2}j,\ 2,\ 6+2\sqrt{2}j,\ 6,\ 6+\sqrt{2}j\right\}$$

encuentra la DFT de 4 puntos de la señal $x[n]$ SIN calcular explícitamente la secuencia $x[n]$ sino usando la relación entre su DFT $X[k]$ y la transformada discreta de Fourier $X(e^{jw})$.

Las muestras de $X_8[k]$, la DFT de ocho muestras de $x[n]$, son ocho muestras equiespacidas del espectro de la transformada discreta de Fourier de $x[n]$:

$X_8[k] = X(e^{j\omega T})\Big|_{wT=\frac{2\pi}{8}k}$, k=0,...,7

Más precisamente, son las muestras del espectro para las siguientes frecuencias

$$wT = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

En una DFT de 4 puntos de $x[n]$, obtenemos muestras del espectro

$X_4[k] = X(e^{j\omega T})\Big|_{wT=\frac{2\pi}{4}k}$, k=0,...,3

Estas muestras corresponden a las siguientes frecuencias

$$wT = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

Si comparamos los dos conjuntos de frecuencias, encontramos que:

$$X_4[0] = X(e^{j0}) = X_8[0] = 10$$

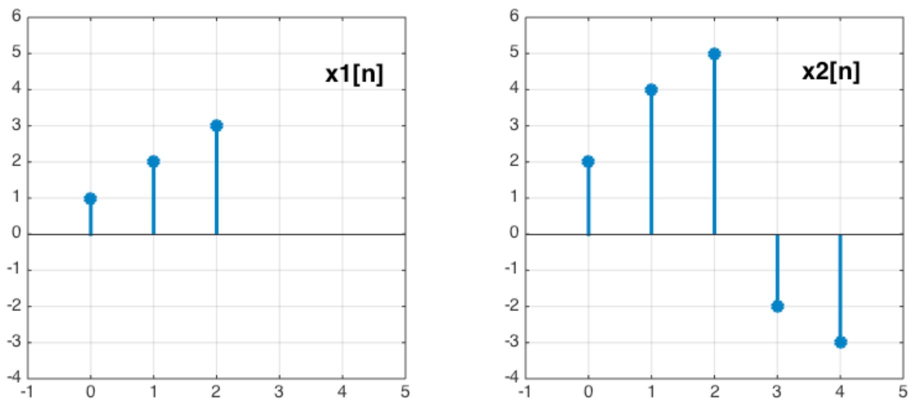
$$X_4[1] = X(e^{j\frac{\pi}{2}}) = X_8[2] = 6$$

$$X_4[2] = X(e^{j\pi}) = X_8[4] = 2$$

$$X_4[3] = X(e^{j\frac{3\pi}{2}}) = X_8[6] = 6$$

Por lo tanto, la DFT de 4 muestras de $x[n]$ es $X_4[k]=\{10,6,2,6\}$

b) Dadas las siguientes señales x1[n] y x2[n],



Calcula la expresión que relaciona sus DFTs X1[k] y X2[k], SIN calcular explícitamente las DFTs.

Podemos expresar la secuencia x2[n] en función de x1[n] (x1 escalada por un factor 2 más x1 desplazada dos muestras a la derecha)

x2[n]=2x1[n]-x1[n-2]

Por lo tanto, según las propiedades de linealidad y desplazamiento circular de la DFT, la relación entre las DFT de N muestras de las señales es:

$$X_2[k]=2X_1[k]+X_1[k]e^{-j\frac{2\pi 2}{N}}$$

donde $X_1[k]$ y $X_2[k]$ son las DFT de N muestras de x1[n] y x2[n], respectivamente, con N>=5

5 = el máximo del número de muestras de x1 y x2

c) Si x1[n] = (2, 4, 0, 1)

Sabiendo que la relación entre las transformadas de Fourier (DFT) de 4 muestras de x1[n] y otra señal x2[n] es la siguiente: $X_2[k]=3X_1[k]e^{\frac{-j6\pi k}{4}}$

Calcula x2[n], SIN calcular explícitamente las transformadas DFT $X_1[k]$ ni $X_2[k]$.

$$X_2[k] = 3X_1[k]e^{\frac{-j6\pi k}{4}}$$

Por las propiedades de linealidad y desplazamiento circular de la DFT, podemos inferir la relación que existe entre las secuencias x1 y x2: desplazamiento circular de 3 muestras y escalado

x2[n]=3x1[n-3]

Por lo tanto, x2[n]= [12, 0, 3, 6]

Problema 3 (2 puntos)

Considera las siguientes secuencias:

x1[n]=($\underline{2}$, 0, -2, 0, 1)

x2[n]= ($\underline{1}$, 0, 2, 0)

a) Calcula la convolución lineal de las secuencias utilizando sus DFTs y la propiedad de convolución de la DFT.

La propiedad de convolución de la DFT dice que la DFT de la convolución circular de dos secuencias es igual al producto de las DFTs de las señales. Para que esta convolución circular coincida con la convolución lineal, la duración de las secuencias debe ser mayor o igual que N1+N2-1, donde N1 es la duración de la primera secuencia, y N2 la duración de la segunda. Por lo tanto, los pasos a realizar serán,

- calcular las DFTs de N>=N1+N2-1 muestras de las señales,
- multiplicar las DFTs
- calcular la DFT inversa

En este caso es N1=5, N2=4, y por lo tanto N>=5+4-1=8

Calculamos las DFTs de 8 muestras de las señales x1 y x2:

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^{8} x_1[n]e^{-j\frac{2\pi nk}{8}}$$

$$X_1 = [1,\ 1+2j,\ 5,\ 1-2j\ ,\ 1,\ 1+2j,\ 5,\ 1-2j]$$

$$X_2[k] = \sum_{n=0}^{8} x_2[n] e^{-j\frac{2\pi nk}{8}}$$

$$X_1 = [3,\ 1 - 2j,\ -1,\ 1 + 2j\ ,\ 3,\ 1 - 2j,\ -1,\ 1 + 2j]$$

El producto de las dos transformadas es:

$$Y = X_1 X_2 = [3,\ 5,\ -5,\ 5,\ 3,\ 5,\ -5,\ 5]$$

Finalmente, calculamos la IDFT:

$$y = [\ 2,\ 0,\ 2,\ 0,\ -3,\ 0,\ 2,\ 0]$$

b) Calcula la convolución lineal de las secuencias mediante la convolución circular y comprueba que el resultado coincide con el obtenido en (a)

Para que el resultado de una convolución circular entre dos secuencias x1 y x2 coincida con el resultado de una convolución lineal, la duración de las secuencias debe ser al menos N=N1+N2-1, donde N1 y N2 es la duración de las secuencias x1 y x2, respectivamente.

Por lo tanto, aplicamos zero-padding para trabajar con las dos secuencias con N= 5 + 4 – 1= 8 muestras

x1=($\underline{2}$, 0, -2, 0, 1, 0, 0, 0)

x2= ($\underline{1}$, 0, 2, 0 , 0, 0, 0, 0)

Giramos la segunda secuencia x2[n], y la vamos desplazando circularmente a la derecha de a una unidad. Para cada desplazamiento, calculamos los productos de los elementos correspondientes en ambas secuencias:

y[0]   [2 0 -2 0 1 0 0 0]

[1 0 0 0 0 0 2 0]   = 2

y[1]   [2 0 -2 0 1 0 0 0]

[0 1 0 0 0 0 0 2]   = 0

y[2]   [2 0 -2 0 1 0 0 0]

[2 0 1 0 0 0 0 0]   = 4-2=2

y[3]   [2 0 -2 0 1 0 0 0]

[0 2 0 1 0 0 0 0]   = 0

y[4]   [2 0 -2 0 1 0 0 0]

[0 0 2 0 1 0 0 0]   =-4+1=-3

y[5]   [2 0 -2 0 1 0 0 0]

[0 0 0 2 0 1 0 0]   = 0

y[6]   [2 0 -2 0 1 0 0 0]

[0 0 0 0 2 0 1 0]   = 2

y[5]   [2 0 -2 0 1 0 0 0]

[0 0 0 0 0 2 0 1]   = 0

Entonces y[n]=[2 0 2 -3 0 2 0], coincide con el resultado calculado en (a).

c) Calcula la convolución lineal de las secuencias gráficamente y comprueba que el resultado coincide con el obtenido en (a) y (b).

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] x_2[n-k]$$

Para esto, se dibuja x1[k] y x2[k], se gira x2[-k]. Para calcular la convolución en cada punto n se desplaza x2 a la posición n, x2[n-k], se multiplican las señales muestra a muestra y se suman los productos.

Los valores de la convolución en cada punto son

y[n]= 0 para n<0

y[0]= 2.1 = 2

y[1]= 0

y[2]= 2.2-2.1 = 2

y[3]= 0

y[4]= -2.2+1.1 = -3

y[5]= 0

y[6]= 1.2 = 2

y[7]= 0

El resultado es y[n]=[$\underline{2}$,0, 2, 0, -3, 0, 2,0], el mismo obtenido en (a) y (b).

Problema 4 (2 puntos)

Considera las siguientes secuencias:

x1[n] = ($\underline{9}$, 3, 1, 2)

x2[n] = ($\underline{4}$, 0, 5, 2)

a) Calcula las DFTs de cuatro puntos X1[k] y X2[k],

(podemos calcularlo fácilmente utilizando la formulación matricial, para una matriz de 4x4, se omiten aquí los cálculos)

$$X1_4[k]=[\ 15,\ \ 8-j,\ \ 5,\ \ 8+j]$$

$$X2_4[k]=[\ 11,\ \ \text{-}1+2j,\ 7,\ \ \text{-}1\text{-}2j]$$

b) Calcula la x3[n], la convolución circular de N=4 puntos de las secuencias aplicando directamente el operador de convolución circular.

x1[n] = ($\underline{9}$, 3, 1, 2)

x2[n] = (4, 0, 5, 2)

Giramos la segunda secuencia x2[n], y la vamos desplazando circularmente a la derecha de a una unidad. Para cada desplazamiento, calculamos los productos de los elementos correspondientes en ambas secuencias:

y[0] [9 3 1 2]

[4 2 5 0] = 36+6+5=47

y[1] [9 3 1 2]

[0 4 2 5] = 12+2+10 = 24

y[2] [9 3 1 2]

[5 0 4 2] = 45 + 4 + 4 = 53

y[3] [9 3 1 2]

[2 5 0 4] = 18 + 15 + 8 = 41

Entonces y[n]=[47, 24, 53, 41]

c) Calcula la secuencia x3[n] del apartado anterior trabajando en el dominio de la transformada de Discreta de Fourier (DFT).

Calculamos el producto de las transformadas en (a), punto a punto

$$Y[k] = X1_4[k].X2_4[k] = [165, -6+17j, 35, -6-17j]$$

Y luego la IDFT:

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y[0] \\ Y[1] \\ Y[2] \\ y[3] \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 165 \\ -6+17j \\ 35 \\ -6-17j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 24 \\ 53 \\ 41 \end{bmatrix}$$

Entonces y[n]=[47, 24, 53, 41]

d) Determina x4[n], la convolución lineal de las secuencias mediante la convolución circular. Hay alguna diferencia entre x3[n] y x4[n]?

Para que el resultado de una convolución circular entre dos secuencias x1 y x2 coincida con el resultado de una convolución lineal, la duración de las secuencias debe ser al menos N=N1+N2-1, donde N1 y N2 es la duración de las secuencias x1 y x2, respectivamente.

Por lo tanto, aplicamos zero-padding para trabajar con las dos secuencias con N= 4 + 4 – 1= 7 muestras

x1[n] = [$\underline{9}$, 3, 1, 2,0, 0, 0]

x2[n] = [$\underline{4}$, 0, 5, 2, 0, 0, 0]

Giramos la segunda secuencia x2[n], y la vamos desplazando circularmente a la derecha de a una unidad. Para cada desplazamiento, calculamos los productos de los elementos correspondientes en ambas secuencias:

y[0] [9 3 1 2 0 0 0]

[4 0 0 0 2 5 0] = 36

y[1] [9 3 1 2 0 0 0]

[0 4 0 0 0 2 5] = 12

y[2] [9 3 1 2 0 0 0]

[5 0 4 0 0 0 2] = 45+4=49

y[3]   [9 3 1 2 0 0 0]

[2 5 0 4 0 0 0]   = 18+15+8=41

y[4]   [9 3 1 2 0 0 0]

[0 2 5 0 4 0 0]   = 6+5=11

y[5]   [9 3 1 2 0 0 0]

[0 0 2 5 0 4 0]   = 2+10=12

y[6]   [9 3 1 2 0 0 0]

[0 0 0 2 5 0 4]   = 4

Entonces y[n]=[36, 12, 49, 41, 11, 12, 4]

Sí hay diferencia. En este caso se trata de una convolución linear, o convolución circular de 7 muestras, mientras que x3 es una convolución circular de 4 muestras.

Problema 5 (2 puntos)

Calcula la convolución entre x[n] y h[n] utilizando el método de convolución por bloques overlap-add. La longitud de h[n] es P=4. Utiliza bloques de longitud L=5

x[n] = ($\underline{4}$, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 , 4, 2, 0, 2, 2)

h[n] = ($\underline{1}$, -3, 2, 1)

Calcula la convolución entre x[n] y h[n] utilizando el método de convolución por bloques overlap-add. La longitud de h[n] es P=4. Utiliza bloques de longitud L=5

x[n] = ($\underline{3}$, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 2, 1)

h[n] = ($\underline{1}$, 3 , -1, 2)

a) Etapa 1

x1[n] = {4 5 6 5 4}

y1[n] = h[n] $*_7$ x1[n] = { 4 -7 -1 1 6 4 13 4 }

De la salida parcial y1[n], las primeras L=5 muestras son correctas y pueden escribirse en el buffer de salida

y[n] = {4 -7 -1 1 6 }

Las últimas P-1=3 muestras { 4 13 4} deberán sumarse a las P-1=3 muestras de la segunda salida parcial.

b) Etapa 2:

x2[n] = { 3 2 1 0 1 }

y2[n] = h[n] $*_7$ x2[n] = { 3 -7 1 4 5 -2 2 1 }

Las primeras P-1=3 muestras de y2 se suman a las últimas muestras de y1,

el segundo bloque es {3 + 4   -7+13   1+4   4 5 } = { 7 6 5 4 5 }

c) Etapa 3

x3[n] = { 2 3 4 5 6 }

y3[n] = h[n] $*_7$ x3[n] = { 2 -3 -1 1 2 -4 17 6}

Las últimas 3 muestras de y2 se suman a las tres primeras de y3

{ 2-2 -3+2 -1+1 1 2 }

el tercer bloque es { 0 -1 0 1 2 }

d) Etapa 4

x4[n] = { 4 2 0 2 2 }

y4[n] = h[n] $*_7$ x4[n] = { 4 -10 2 10 -2 -2 6 2}

Las últimas 3 muestras de y3 se suman a las tres primeras de y4

{ 4-4 -10+17 2+6 10 -2 }

el cuarto bloque es { 0 7 8 10 -2 }

e) El resultado final:

y[n] = { 4 -7 -1 1 6 7 6 5 4 5 0 -1 0 1 2 0 7 8 10 -2 -2 6 2 }