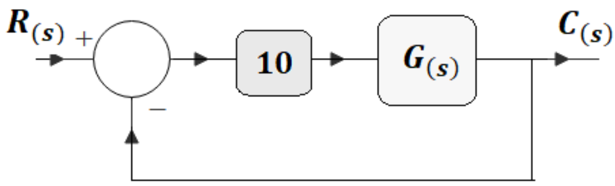
2da parte:

4. Incluir un controlador proporcional, esto es, una ganancia (bloque *Gain*) en el diagrama. Dar el valor 10 a la ganancia y obtener de nuevo su respuesta ante las entradas utilizadas en el apartado anterior.

5. De forma análoga, obtener gráficamente el valor del error que presenta la respuesta del sistema al cabo de 10 segundos. Calcular la expresión analítica de dicho error en estado estacionario para cada una de las señales de entrada.

Respuesta:

El sistema con la incorporación de un controlador de ganancia 10, se representa mediante el siguiente diagrama de bloques:



Nuevamente se consideran las dos plantas siguientes:

$$Función\ de\ transferencia\ de\ planta\ 1: \quad \boldsymbol{G_{1(s)}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s+1}}$$

$$Función\ de\ transferencia\ de\ planta\ 2: \quad \boldsymbol{G_{2(s)}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s^2+s}}$$

1. Aplicar las siguientes señales de entrada:
   a. Escalón unitario
   b. Rampa unitaria
   c. Escalón de amplitud factor*2
2. Observar la respuesta temporal simulada. Obtener gráficamente el valor del error que presenta la respuesta del sistema al cabo de 10 segundos. Calcular la expresión analítica de dicho error en estado estacionario para cada una de las señales de entrada.

Desarrollo:

Definimos en Matlab las funciones de transferencia de cada planta con la ganancia incorporada:

```
>> G1=tf([10],[1 1]);

>> G2=tf([10],[1 1 0]);
```

```
G1 =

   10
  -----
  s + 1
```

```
G2 =

    10
  -------
  s^2 + s

Continuous-time transfer function.
```

Definimos los sistemas de realimentación unitaria para cada una de las plantas:

>> sys1=feedback(G1,1);

>> sys2=feedback(G2,1);

```
sys1 =

    10
  ------
  s + 11
```

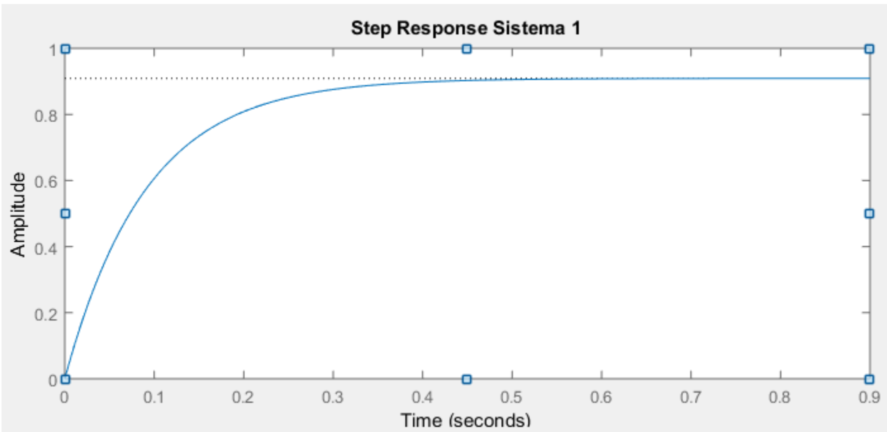
```
sys2 =

       10
  ------------
  s^2 + s + 10

Continuous-time transfer function.
```

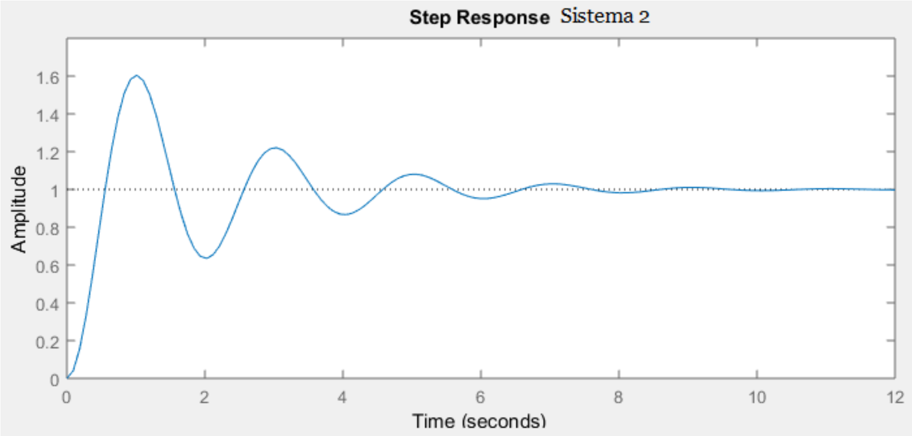
<u>Escalón unitario</u>: Con la función ***step()*** simulamos la respuesta al escalón unitario de cada sistema de realimentación definido:

>> step(sys1)



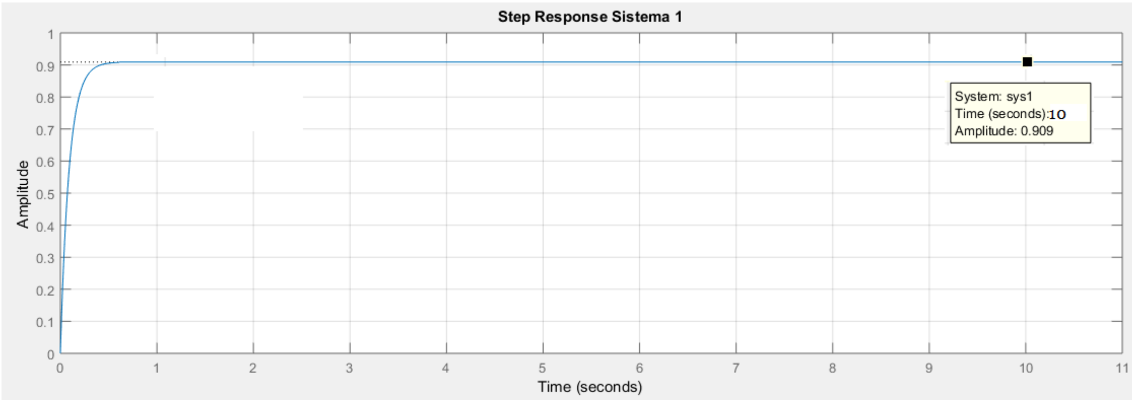
Gráfica 1

>> step(sys2)



Gráfica 2

Mediante estas gráficas podemos calcular el valor del error que presenta la respuesta de cada sistema a la entrada escalón al cabo de 10 segundos. Comenzamos con ***sys1***:



Gráfica 3

En la gráfica 3 podemos observar que la salida del sistema 1, a los ***10*** segundos es igual a ***0.9***. Por lo tanto el error, $\boldsymbol{e_{1(t)}}$ de este sistema a la entrada escalón cuando ***t=10s,*** es:

$$e_{1(t)} = r_{(t)} - c_{1(t)} = 1 - c_{1(t)}$$

$$e_{1(10)} = 1 - 0.9 = 0.091$$

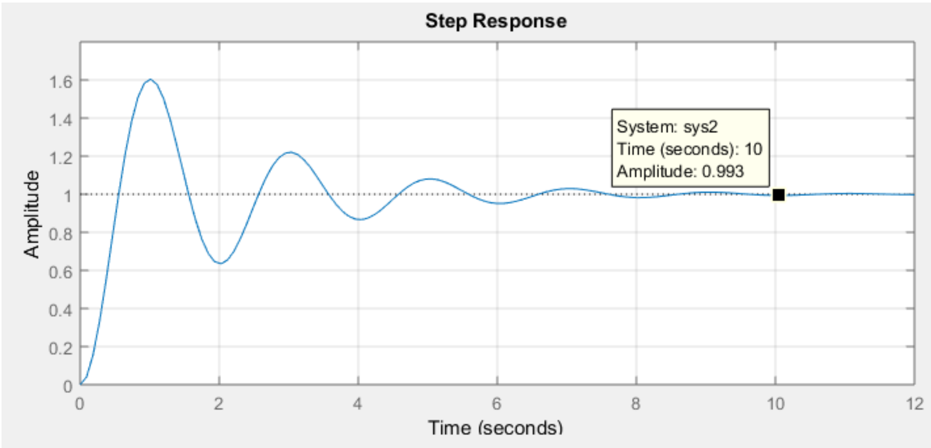
El error en estado estable $\boldsymbol{e_{1step(\infty)}}$ del sistema 1 a la entrada escalón unitario en estado estable, se puede calcular analíticamente utilizando la constante de posición $\boldsymbol{K_p}$:

$$K_p = \lim_{s \to 0} \boldsymbol{G}_{1(s)} = \lim_{s \to 0} \left(\frac{\mathbf{10}}{\boldsymbol{s} + \mathbf{1}} \right) = 10$$

El error en estado estable $\boldsymbol{e_{1step(\infty)}}$ del sistema 1 a la entrada escalón unitario ***es***:

$$e_{1step(\infty)} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+10} = 0.09$$

Aplicamos este mismo procedimiento para calcular el valor del error que presenta la respuesta del ***sys2*** a la entrada escalón unitario:



Gráfica 4

En la gráfica 4 podemos observar que la salida del sistema 2, a los ***10*** segundos es igual a ***0.993***. Por lo tanto el error, $\boldsymbol{e_{2(t)}}$ de este sistema a la entrada escalón cuando ***t=10s,*** es:

$$e_{2(t)} = r_{(t)} - c_{2(t)}$$

$$e_{2(10)} = 1 - 0.993 = 0.007$$

El error en estado estable $\boldsymbol{e_{2step(\infty)}}$ del sistema 2 a la entrada escalón unitario en estado estable, se puede calcular analíticamente utilizando la constante de posición $\boldsymbol{K_p}$:

$$K_p = \lim_{s\to 0} \boldsymbol{G}_{2(s)} = \lim_{s\to 0}\left(\frac{\mathbf{10}}{\boldsymbol{s^2+s}}\right) = \infty$$

El error en estado estable $\boldsymbol{e_{2step(\infty)}}$ del sistema 2 a la entrada escalón unitario ***es***:

$$e_{2step(\infty)} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

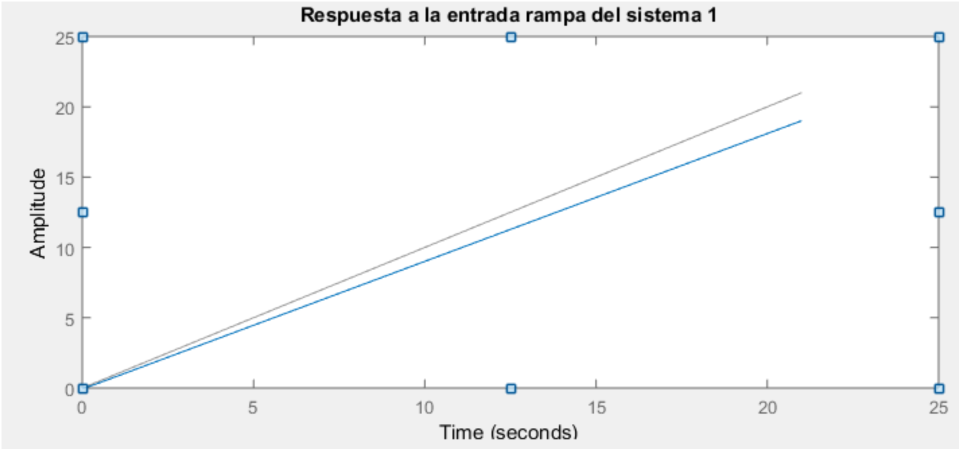
<u>Rampa unitaria</u>:

Para evaluar la respuesta de cada sistema a la rampa unitaria debemos en primer lugar definir la función rampa unitaria mediante:

>> t=0:0.01:21;

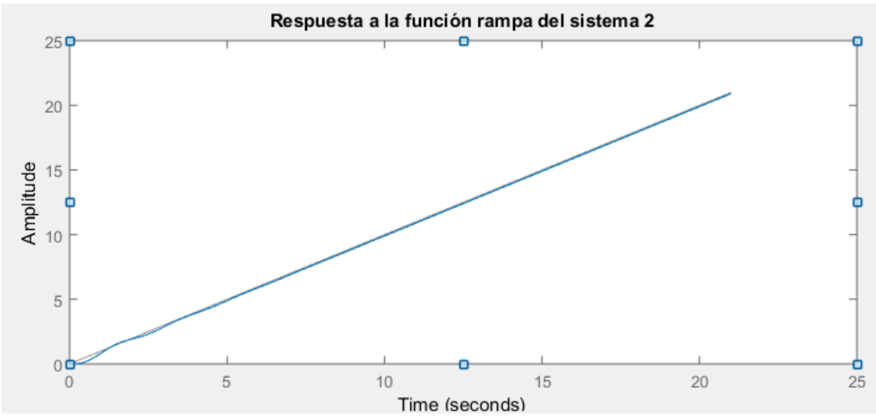
>> x=t;

>> lsim(sys1,x,t)



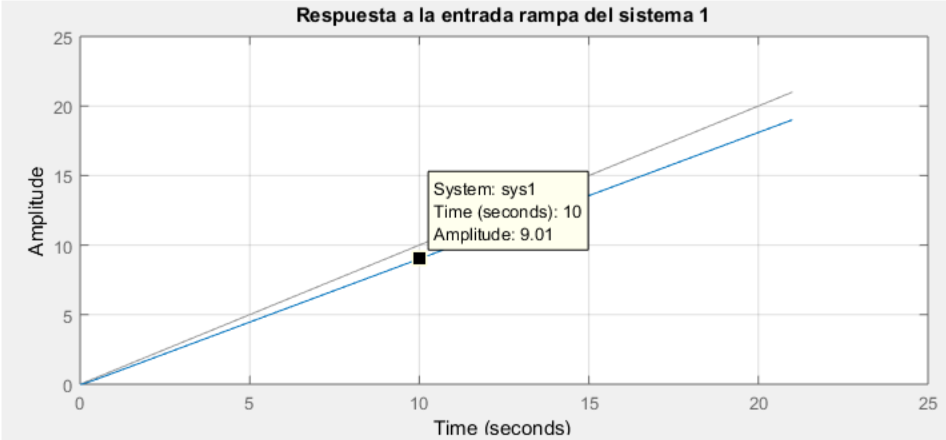
Gráfica 5 (*la salida del sistema 1 en azul*)

>> lsim(sys2,x,t)



Gráfica 6 (*la salida del sistema 2 en azul*)

A continuación calculamos el valor del error que presenta la respuesta del ***sys1*** a la entrada rampa al cabo de 10 segundos:



Gráfica 7 (*la salida del sistema 1 en azul*)

En la gráfica 7 podemos observar que la salida del sistema de realimentación 1, a los ***10*** segundos es igual a ***9.01***. Por lo tanto el error $\boldsymbol{e_{1(t)}}$ de este sistema a la entrada rampa cuando ***t=10s,*** es:

$$e_{1(t)} = r_{(t)} - c_{1(t)}$$

$$e_{1(10)} = 10 - 9.01 \cong 1$$

El error $\boldsymbol{e_{1rampa(\infty)}}$ del sistema 1 a la entrada rampa, se puede calcular analíticamente utilizando la constante de posición $\boldsymbol{K_v}$:

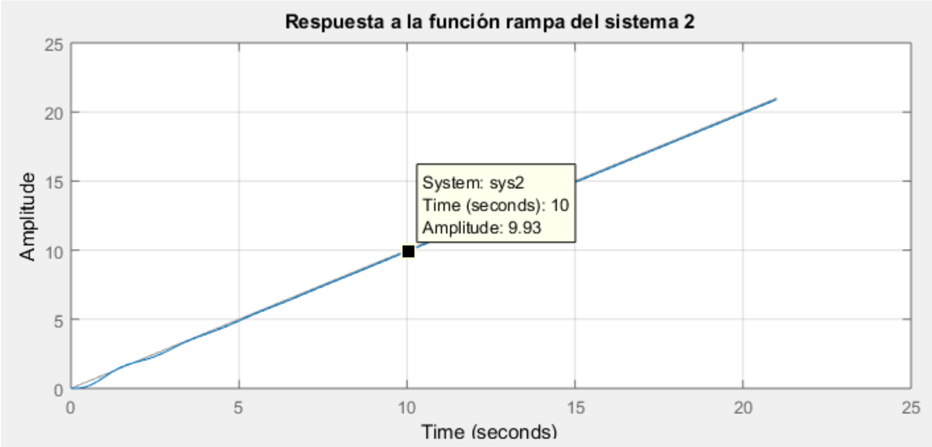
$$K_v = \lim_{s \to 0} \boldsymbol{sG_{1(s)}} = \lim_{s \to 0} \boldsymbol{s}\left(\frac{\mathbf{10}}{\boldsymbol{s}+\mathbf{1}}\right) = 0$$

El error en estado estable $\boldsymbol{e_{1ramp(\infty)}}$ del sistema 1 a la entrada rampa ***es***:

$$e_{1rampa(\infty)} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{0} = \infty$$

Si vemos la gráfica 7 podemos ver que la entrada crece indefinidamente, y también crece infinitamente la separación con la salida del sistema. Por eso el error en estado estable del sistema 1 a la entrada rampa es infinito.

Para el ***sys2*** al cabo de 10 segundos:



Gráfica 8 (*la salida del sistema 2 en azul*)

En la gráfica 8 podemos observar que la salida del sistema 2, a los ***10*** segundos es igual a ***9.93***. Por lo tanto el error $\boldsymbol{e_{2(t)}}$ de este sistema a la entrada rampa cuando ***t=10s,*** es:

$$e_{2(t)} = r_{(t)} - c_{2(t)}$$

$$e_{2(10)} = 10 - 9.93 \cong 0.1$$

El error $\boldsymbol{e_{2rampa(\infty)}}$ del sistema 2 a la entrada rampa, se puede calcular analíticamente utilizando la constante de posición $\boldsymbol{K_v}$:

$$K_v = \lim_{s \to 0} \boldsymbol{sG_{2(s)}} = \lim_{s \to 0} \boldsymbol{s} \left(\frac{\mathbf{10}}{\boldsymbol{s^2 + s}} \right) = 10$$

El error en estado estable $\boldsymbol{e_{2ramp(\infty)}}$ del sistema 2 a la entrada rampa ***es***:

$$e_{2rampa(\infty)} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{10} = 0.1$$

Si vemos la gráfica 8 podemos ver que ambas señales, entrada y salida, crecen en paralelo indefinidamente, con una diferencia constante de ***0.1***. En conclusión, añadir una ganancia de 10 a la función de transferencia directa ha mejorado el resultado en el estado estable, reduciendo el error a ***0.1***.

<u>Escalón de amplitud factor*2</u>:

Utilizamos el factor=0.7

Por tanto, el escalón tendrá una amplitud de 1.4

Para evaluar la respuesta de cada sistema al escalón de amplitud 1.4 simplemente multiplicamos cada sistema por 1.4 y evaluamos la respuesta para el escalón unitario. A cada sistema nombramos 1.1 y 2.2 respectivamente. Entonces:

```
>> sys11= 1.4*sys1

>> sys22=1.4* sys2;
```

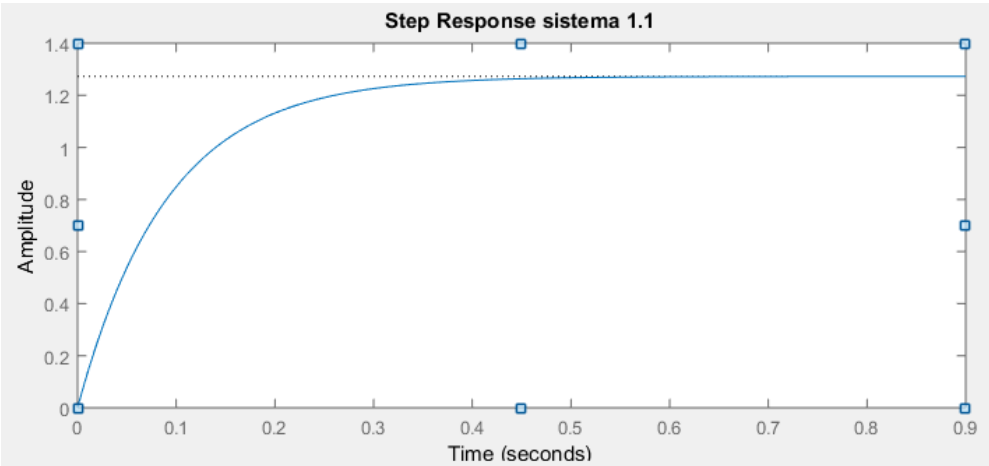
```
sys11 =       sys22 =

   14             14
 ------      ------------
 s + 11      s^2 + s + 10

Continuous-time transfer function.
```

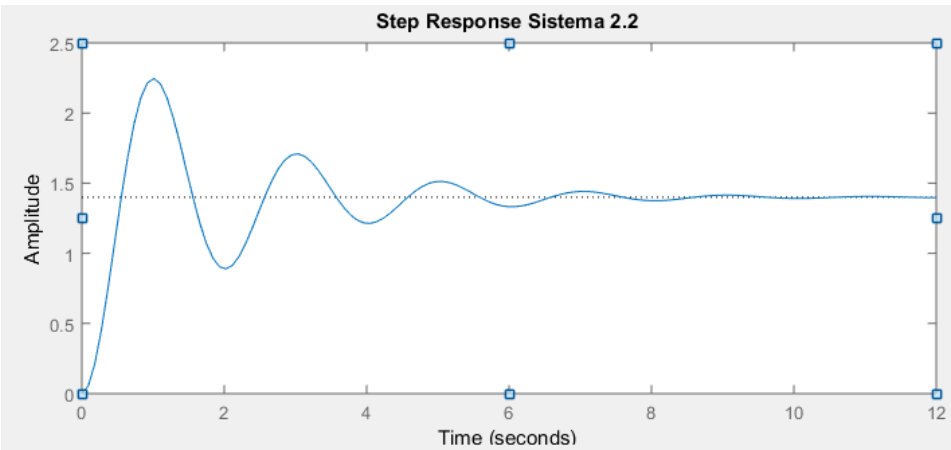
Procedemos a graficar los sistemas anteriormente definidos:

```
>> step(sys11)
```



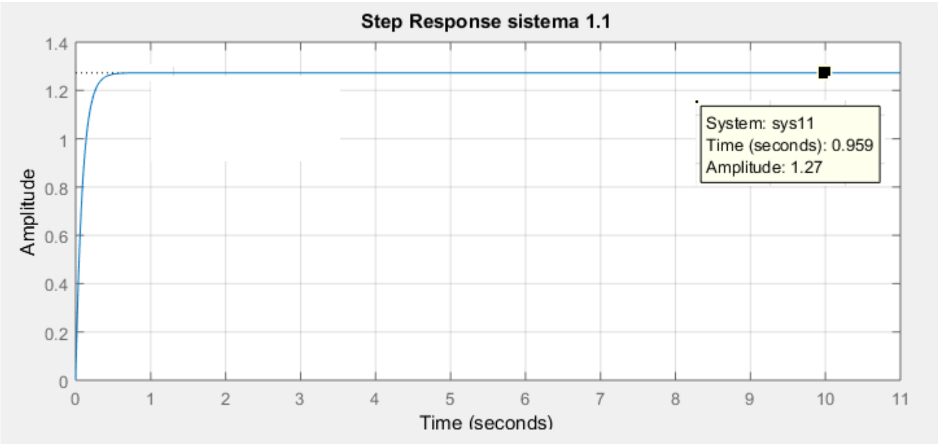
Gráfica 9

```
>>step(sys22)
```



Gráfica 10

Aplicamos el procedimiento para calcular el valor del error que presenta la respuesta del ***sys1.1*** a la entrada escalón con amplitud 1.4 al cabo de 10 segundos:



Gráfica 11

En la gráfica 11 podemos observar que la salida del ***sistema 1.1*** a los ***10*** segundos es igual a ***1.27***. Por lo tanto el error, $\boldsymbol{e_{1.1(t)}}$ de este sistema a la entrada escalón con amplitud 1.4 cuando ***t=10s,*** es:

$$e_{1.1(t)} = r_{(t)} - c_{1.1(t)} = 1.4 - c_{11(t)}$$

$$e_{1.1(10)} = 1.4 - 1.27 = 0.13$$

Utilizando el principio de superposición, podemos calcular el error a la entrada escalón utilizando la constante de posición $\boldsymbol{K_p}$ y sumando 0.4 a la expresión para $e_{1.1step(\infty)}$:

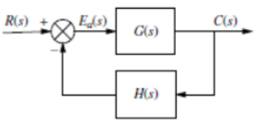
$$K_p = \lim_{s\to 0} \boldsymbol{G_{eq(s)}}$$

Dónde:

$$G_{eq(s)} = \frac{1.4(\frac{10}{s+1})}{1 + \left(\frac{10}{s+1}\right) - 1.4(\frac{10}{s+1})}$$

$$\boldsymbol{G_{eq(s)} = \frac{14}{s-3}}$$

Nota: se determinó $\boldsymbol{G_{eq}}$ mediante la regla siguiente:



$$\boldsymbol{G_{e(s)} = \frac{G_{(s)}}{1 + G_{(s)}H_{(s)} - G_{(s)}}}$$

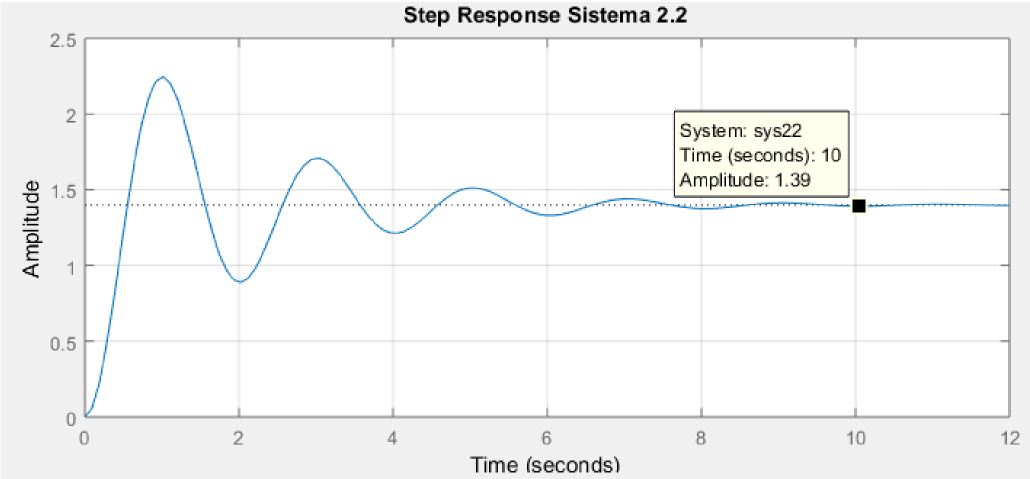
Por tanto:

$$K_p = \lim_{s \to 0} \boldsymbol{G_{eq(s)}} = \lim_{s \to 0} \frac{\mathbf{14}}{\boldsymbol{s-3}} = \mathbf{-4.67}$$

Se confirma que el error en estado estable del sistema 1.1 a la entrada escalón unitario con amplitud 1.4 ***es***:

$$0.4 + \ e_{11step(\infty)} = 0.4 + \frac{1}{1-4.67} = 0.4 + \frac{1}{3.33} = 0.13$$

Aplicamos el mismo procedimiento para calcular el valor del error que presenta la respuesta del ***sys2.2*** a la entrada escalón unitario al cabo de 10 segundos:



Gráfica 12

En la gráfica 12 podemos observar que la salida del sistema 2.2, a los ***10*** segundos es igual a ***1.39***. Por lo tanto el error, $\boldsymbol{e_{2.2(t)}}$ de este sistema a la entrada escalón unitario con amplitud 1.4 cuando ***t=10s,*** es:

$$e_{2.2(t)} = r_{(t)} - c_{2.2(t)} = 1.4 - c_{2.2(t)}$$

$$e_{2.2(10)} = 1.4 - 1.39 \cong 0$$

Se puede calcular el error a la entrada escalón en estado estable utilizando la constante de posición $\boldsymbol{K_p}$:

$$K_p = \lim_{s \to 0} \boldsymbol{G_{eq(s)}}$$

Dónde:

$$G_{eq(s)} = \frac{1.4(\frac{10}{s^2+s})}{1 + \left(\frac{10}{s^2+s}\right) - 1.4(\frac{10}{s^2+s})}$$

$$\boldsymbol{G_{eq(s)}} = \frac{\mathbf{14}}{\boldsymbol{s^2 + s - 4}}$$

Por tanto:

$$K_p = \lim_{s\to 0} \boldsymbol{G_{eq(s)}} = \lim_{s\to 0} \frac{\mathbf{14}}{\boldsymbol{s^2 + s - 4}} = \mathbf{-3.5}$$

Se confirma que el error en estado estable del sistema 2.2 a la entrada escalón con amplitud 1.4 ***es***:

$$0.4 + e_{2.2step(\infty)} = 0.4 + \frac{1}{1 - 3.5} = 0.4 - 0.4 = 0$$