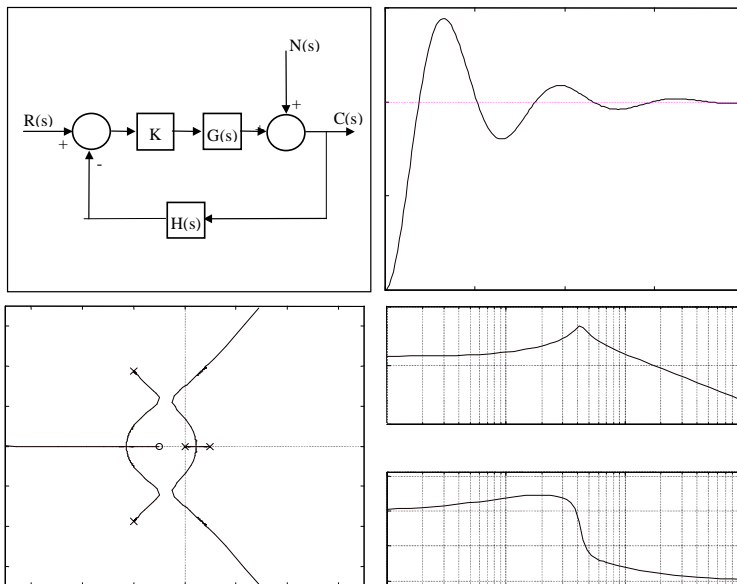


Automática:

Problemas resueltos

3ª Edición
Manuel de la Paz Moya
Natividad de la Paz Moya



Dpto. de Ingeniería de Sistemas y
Automática
Universidad de Málaga

Automática: problemas resueltos

Automática: problemas resueltos

Automática: problemas resueltos

Manuel de la Paz Moya
Profesor Titular de Escuela Universitaria
Dpto. de Ingeniería de Sistemas y Automática
Universidad de Málaga

Natividad de la Paz Moya
Ingeniera en Electrónica

Automática: problemas resueltos

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o método sin la autorización escrita de los autores.

© Manuel de la Paz Moya y Natividad de la Paz Moya
I.S.B.N. 84-605-6982-9
Depósito Legal MA-1292-97

*A los profesionales, familiares
y amigos que, desde el anonimato,
luchan contra el cáncer.*

M. de la Paz

Automática: problemas resueltos

Contenidos:

| | |
|--|------------|
| <i>Tema 1.- Nociones básicas de sistemas y señales.</i> | 8 |
| <i>Tema 2.- Herramientas matemáticas.</i> | 16 |
| <i>Tema 3.- Descripción externa.</i> | 47 |
| <i>Tema 4.- Descripción interna.</i> | 77 |
| <i>Tema 5.- Modelado matemático de sistemas dinámicos.</i> | 83 |
| <i>Tema 6.- Acciones básicas de control.</i> | 144 |
| <i>Tema 7.- Análisis de la respuesta transitoria.</i> | 148 |
| <i>Tema 8.- Precisión.</i> | 175 |
| <i>Tema 9.- Criterio de estabilidad de Routh.</i> | 186 |
| <i>Tema 10.- Análisis por el método del lugar de las raíces.</i> | 207 |
| <i>Tema 11.- Diagramas de Bode.</i> | 242 |
| <i>Tema 12.- Criterio de estabilidad de Nyquist.</i> | 291 |
| Tema 13.- Técnicas de diseño y compensación. | 338 |
| Bibliografía | 351 |

Tema 1:

Nociones básicas de sistemas y señales.

1.- Para las señales de tiempo continuo $x(t)$ y $h(t)$ mostradas en la *figura 1.1*, obtener cada una de las siguientes señales:

a) $x(t-2)$

h) $h(1-2t)$

b) $x(1-t)$

i) $4h\left(\frac{t}{4}\right)$

c) $x(2t+2)$

j) $h\left(\frac{t}{2}\right)\delta(t+1)$

d) $x\left(2-\frac{t}{3}\right)$

k) $x(t)h(t+1)$

e) $[x(t) + x(2-t)]\mu(1-t)$

l) $x(t)h(-t)$

f) $h(t+3)$

m) $x(t-1)h(1-t)$

g) $h\left(\frac{t}{2}-2\right)$

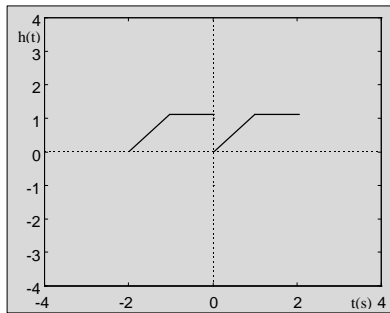
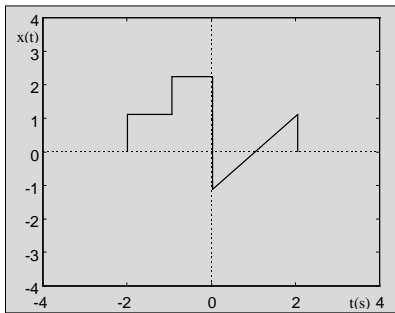
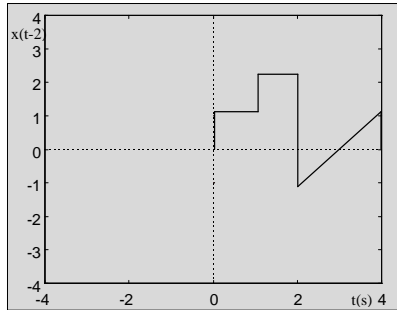


figura 1.1

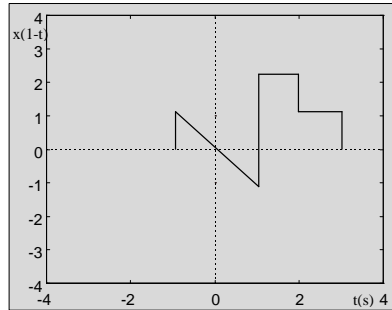
Solución:

Automática: problemas resueltos

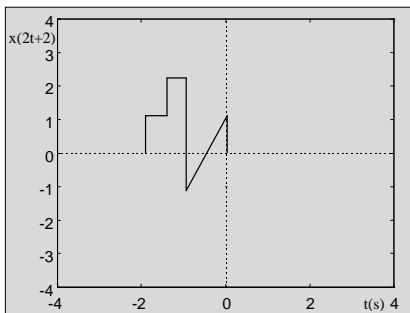
a) $x(t-2)$



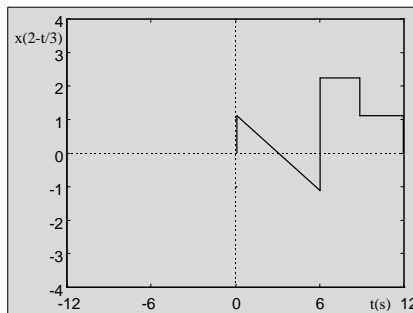
b) $x(1-t)$



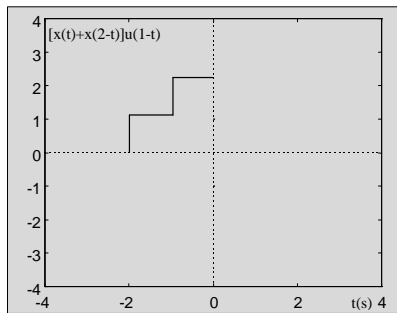
c) $x(2t+2)$



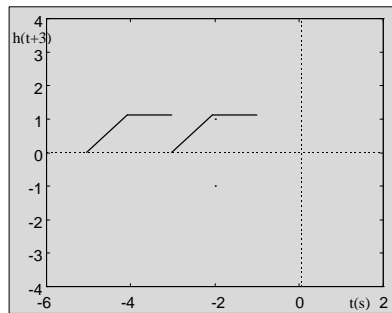
d) $x(2 - \frac{t}{3})$



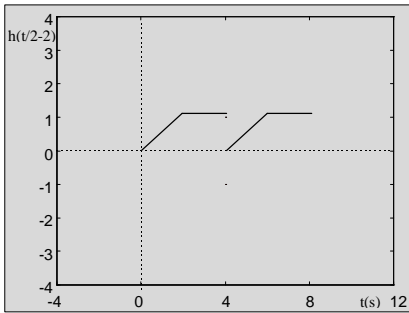
e) $[x(t) + x(2-t)]u(1-t)$



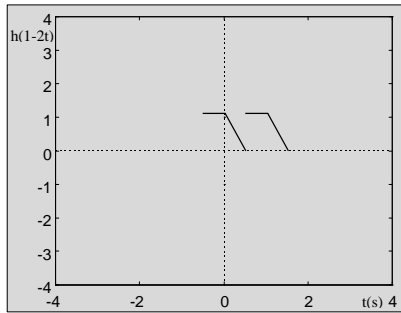
f) $h(t+3)$



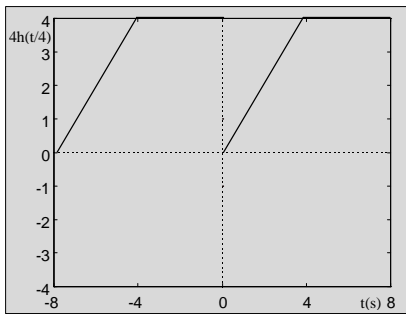
g) $h\left(\frac{t}{2}-2\right)$



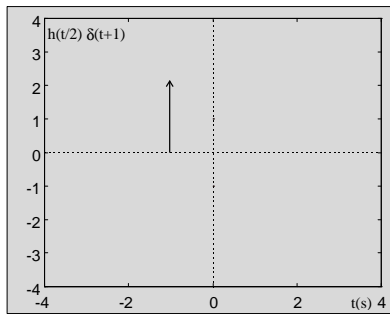
h) $h(1-2t)$



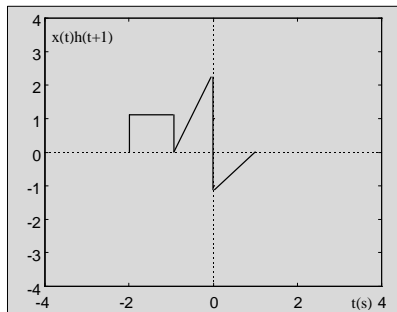
i) $4h\left(\frac{t}{4}\right)$



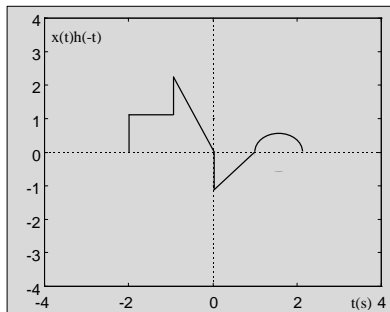
j) $h\left(\frac{t}{2}\right)\delta(t+1)$



k) $x(t)h(t+1)$

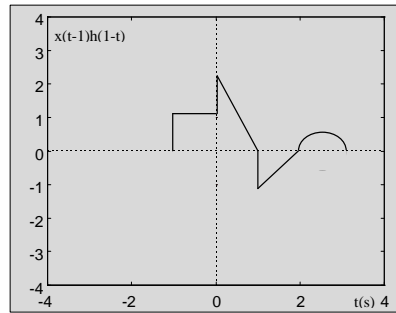


l) $x(t)h(-t)$



m) $x(t-1)h(1-t)$

Automática: problemas resueltos



2.- Estudiar la invarianza en el tiempo de los sistemas de tiempo continuo definidos por las funciones:

$$a) \quad y(t) = \text{sen}(x(t))$$

$$b) \quad y(t) = \frac{d}{dt}(x(t))$$

$$c) \quad y(t) = \int_{-\infty}^{3t} x(\tau) d\tau$$

$$d) \quad y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

Solución:

Para demostrar que un sistema es invariante en el tiempo, debemos comprobar que si $x_1(t)$ tiene como salida $y_1(t)$ y $x_2(t)=x_1(t-t_0)$ tiene como salida $y_2(t)$, entonces $y_2(t)=y_1(t-t_0)$, es decir, un desplazamiento en el tiempo de la entrada provoca otro similar en la salida.

$$a) \quad y(t) = \text{sen}(x(t))$$

Sea $x_1(t)$ una entrada cualquiera al sistema cuya salida será

$$y_1(t) = \text{sen}(x_1(t))$$

Sea $x_2(t)=x_1(t-t_0)$ otra entrada cuya salida viene dada por

$$y_2(t) = \text{sen}(x_2(t)) = \text{sen}(x_1(t - t_0))$$

Por la definición de $y_1(t)$ sabemos que

$$y_1(t - t_0) = \text{sen}(x_1(t - t_0))$$

por lo que podemos afirmar que

$$y_1(t - t_0) = y_2(t)$$

Automática: problemas resueltos

y concluir que el sistema definido por la función $y(t) = \text{sen}(x(t))$ es invariante en el tiempo.

$$b) y(t) = \frac{d}{dt}(x(t))$$

Sea $x_1(t)$ una entrada cualquiera al sistema cuya salida será

$$y_1(t) = \frac{d}{dt}(x_1(t))$$

Sea $x_2(t) = x_1(t - t_0)$ otra entrada cuya salida viene dada por

$$y_2(t) = \frac{d}{dt}(x_2(t)) = \frac{d}{dt}(x_1(t - t_0))$$

Por la definición de $y_1(t)$ sabemos que

$$y_1(t - t_0) = \frac{d}{dt}(x_1(t - t_0))$$

por lo que podemos afirmar que

$$y_1(t - t_0) = y_2(t)$$

y concluir que el sistema definido por la función $y(t) = \frac{d}{dt}(x(t))$ es invariante en el tiempo.

$$c) y(t) = \int_{-\infty}^{3t} x(\tau) d\tau$$

Sea $x_1(t)$ una entrada cualquiera al sistema cuya salida será

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{3t} x_1(\tau) d\tau$$

Sea $x_2(t) = x_1(t - t_0)$ otra entrada cuya salida viene dada por

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{3t} x_2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{3t} x_1(\tau - t_0) d\tau$$

donde realizamos el cambio de variable $\tau' = \tau - t_0$ quedando que

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{3t-t_0} x_1(\tau') d\tau' = \int_{-\infty}^{3t-t_0} x_1(\tau) d\tau$$

Por la definición de $y_1(t)$ sabemos que

$$y_1(t-t_0) = \int_{-\infty}^{3(t-t_0)} x_1(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{3t-3t_0} x_1(\tau) d\tau \neq y_2(t)$$

por lo que podemos afirmar que el sistema definido por la función

$$y(t) = \int_{-\infty}^{3t} x(\tau) d\tau \text{ no es invariante en el tiempo.}$$

$$d) y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

Sea $x_1(t)$ una entrada cualquiera al sistema cuya salida será

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau$$

Sea $x_2(t) = x_1(t-t_0)$ otra entrada cuya salida viene dada por

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x_1(\tau-t_0) d\tau$$

donde realizamos el cambio de variable $\tau' = \tau - t_0$ quedando que

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x_1(\tau') d\tau' = \int_{-\infty}^{t-t_0} x_1(\tau) d\tau$$

Por la definición de $y_1(t)$ sabemos que

$$y_1(t-t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x_1(\tau) d\tau = y_2(t)$$

por lo que podemos afirmar que el sistema definido por la función

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \text{ es invariante en el tiempo.}$$

Tema 2:

Herramientas matemáticas

Automática: problemas resueltos

3.- Calcular para qué valores de s , la función compleja de variable compleja $G(s)=1/(s+2)$ es analítica.

Solución:

Una función compleja $G(s)$ de variable compleja s es analítica en aquellos puntos del plano s donde se cumplan las condiciones de Cauchy-Riemann, que vienen dadas por las expresiones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \sigma} G_x &= \frac{\partial}{\partial \omega} G_y \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} G_y &= -\frac{\partial}{\partial \omega} G_x\end{aligned}$$

donde:

$$s = \sigma + j\omega$$

$$G(s) = G_x + jG_y$$

Si sustituimos en $G(s)$ el valor de s :

$$G(s) = G(\sigma + j\omega) = \frac{1}{\sigma + j\omega + 2} = \frac{\sigma + 2}{(\sigma + 2)^2 + \omega^2} - \frac{\omega}{(\sigma + 2)^2 + \omega^2} j$$

de donde obtenemos que:

$$\begin{aligned}G_x &= \frac{\sigma + 2}{(\sigma + 2)^2 + \omega^2} \\ G_y &= -\frac{\omega}{(\sigma + 2)^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

y si derivamos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \sigma} G_x &= \frac{\partial}{\partial \omega} G_y = \frac{\omega^2 - (\sigma + 2)^2}{((\sigma + 2)^2 + \omega^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} G_y &= -\frac{\partial}{\partial \omega} G_x = \frac{2\omega(\sigma + 2)}{((\sigma + 2)^2 + \omega^2)^2}\end{aligned}$$

De donde podemos comprobar que las condiciones de Cauchy-Riemann se cumplen para todo el plano s , excepto en el punto $s=-2+0j$, que es el único del plano s donde $G(s)$ no es analítica.

4.- Hallar la transformada de Laplace de la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ \cos 2\omega t \cos 3\omega t; & t \geq 0 \end{cases}$$

Solución:

Si aplicamos que:

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

donde:

$$A = 3\omega t$$

$$B = 2\omega t$$

obtenemos las dos expresiones siguientes:

$$\cos(5\omega t) = \cos 3\omega t \cos 2\omega t - \sin 3\omega t \sin 2\omega t$$

$$\cos(\omega t) = \cos 3\omega t \cos 2\omega t + \sin 3\omega t \sin 2\omega t$$

que sumadas miembro a miembro nos permiten obtener:

$$\cos(5\omega t) + \cos \omega t = 2 \cos 3\omega t \cos 2\omega t$$

donde calculamos la transformada de Laplace en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} L(\cos 3\omega t \cos 2\omega t) &= \frac{1}{2} L(\cos 5\omega t + \cos \omega t) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{s}{s^2 + 25\omega^2} + \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right] \end{aligned}$$

5.- Hallar la transformada de Laplace de la función $f(t)$ mostrada en la figura 2.1. Encontrar también el valor límite de $L[f(t)]$ cuando $a \rightarrow 0$.

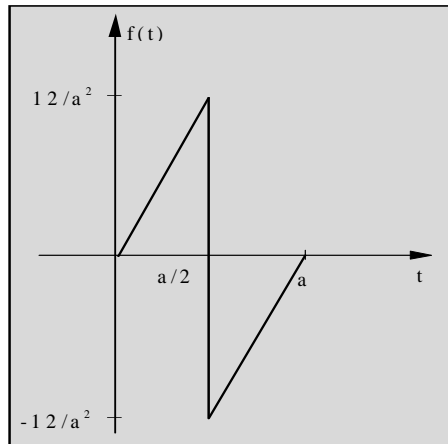


figura 2.1

Solución:

La expresión de la función representada en la figura 2.1 es:

$$f(t) = \frac{24}{a^3} tI(t) - \frac{24}{a^2} I(t - \frac{a}{2}) - \frac{24}{a^3} (t - a)I(t - a)$$

cuya transformada de Laplace viene dada por:

$$F(s) = \frac{24}{a^3} \frac{1}{s^2} - \frac{24}{a^2} e^{-\frac{a}{2}s} \frac{1}{s} - \frac{24}{a^3} e^{-as} \frac{1}{s^2} = \frac{24}{a^3} (\frac{1}{s^2} - e^{-\frac{a}{2}s} \frac{a}{s} - e^{-as} \frac{1}{s^2})$$

Calculemos el valor límite de la transformada de Laplace cuando a tiende a cero.

$$\lim_{a \rightarrow 0} L[f(t)] = \lim_{a \rightarrow 0} F(s) = \frac{24}{s^2} \lim_{a \rightarrow 0} (\frac{1 - ase^{-\frac{a}{2}s} - e^{-as}}{a^3})$$

Automática: problemas resueltos

Para resolver este límite, debemos aplicar tres veces consecutivas la regla de L'Hôpital para la resolución de indeterminaciones en el cálculo de límites, ya que se nos presentan otras tantas indeterminaciones, obteniéndose definitivamente que:

$$\lim_{a \rightarrow 0} F(s) = \frac{24}{s^2} \left(\frac{s^3 - \frac{3s^3}{4}}{6} \right) = s$$

6.- Aplicando el teorema del valor final, determinar el valor de estabilización de la función $f(t)$ cuya transformada de Laplace está dada por $F(s) = \frac{10}{s(s+1)}$. Verificar este resultado tomando la transformada inversa de Laplace de $F(s)$, haciendo que $t \rightarrow \infty$.

Solución:

Queremos calcular el valor de establecimiento de $f(t)$ es decir el límite:

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

Para ello vamos a hacer uso del teorema del valor final según el cual se debe de cumplir que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

por lo que:

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{10}{s(s+1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10}{(s+1)} = 10$$

Para comprobar el resultado, calculamos la transformada inversa de Laplace de $F(s)$:

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{10}{s(s+1)}\right] = L^{-1}\left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}\right]$$

donde A y B los obtenemos como:

$$A = \left. \frac{10s}{s(s+1)} \right|_{s=0} = 10$$

$$B = \left. \frac{10(s+1)}{s(s+1)} \right|_{s=-1} = -10$$

resultando que:

Automática: problemas resueltos

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{10}{s} - \frac{10}{s+1}\right] = 10(1 - e^{-t})I(t)$$

Si calculamos el límite de $f(t)$ cuando t tiende hacia infinito,

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} 10(1 - e^{-t})I(t) = 10$$

que corrobora el resultado obtenido al aplicar el teorema del valor final.

7.- Dada $F(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$, determinar los valores de $f(0_+)$ y $\dot{f}(0_+)$.
 Utilizar el teorema del valor inicial.

Solución:

Para obtener $f(0_+)$ aplicamos directamente el teorema del valor inicial, de modo que:

$$f(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{(s+2)^2} = 0$$

Para conocer $\dot{f}(0_+)$ calculamos la transformada de Laplace a $\dot{f}(t)$ y obtenemos que:

$$G(s) = L\left[\dot{f}(t)\right] = sF(s) - f(0_+) = sF(s) = \frac{s}{(s+2)^2} = G(s)$$

Si aplicamos el teorema del valor inicial a la función $G(s)$, tenemos:

$$g(0_+) = \dot{f}(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{(s+2)^2} = 1$$

Para comprobar el resultado obtenido, calculamos la transformada inversa de Laplace de $F(s)$:

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2}\right] = te^{-2t}$$

y si derivamos $f(t)$ respecto del tiempo:

$$\dot{f}(t) = e^{-2t} - 2te^{-2t}$$

de donde obtenemos que:

$$f(0) = 0 \quad \dot{f}(0) = 1$$

que coincide con lo obtenido al aplicar el teorema del valor inicial.

8.- Calcular las transformadas de Laplace de las funciones que aparecen en la figura 2.2:

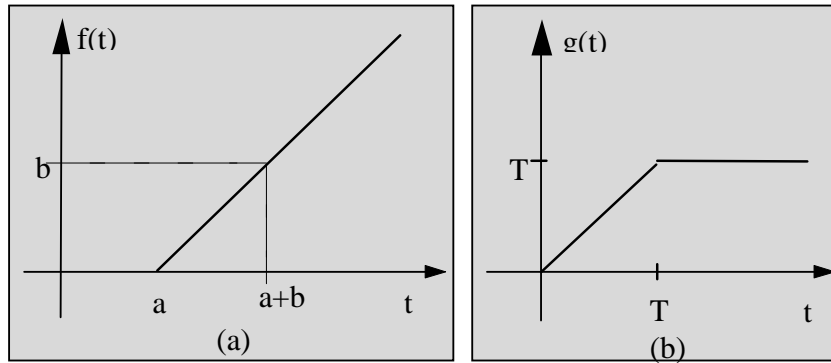


figura 2.2

Solución:

La figura 2.2(a) representa la función $f(t)=(t-a)I(t-a)$ donde $I(t-a)$ es la función identidad retrasada a segundos en el tiempo, por lo que si aplicamos que:

$$L(f(t-a)I(t-a))=e^{-as}F(s)$$

obtenemos que:

$$L((t-a)I(t-a))= e^{-as}/s^2$$

La figura 2.2(b) representa la función $g(t)=tI(t)-(t-T)I(t-T)$ donde $I(t-T)$ es la función identidad retrasada T segundos en el tiempo, por lo que si aplicamos que

$$L(f(t-T)I(t-T))=e^{-Ts}F(s)$$

obtenemos que

$$L(tI(t)-(t-T)I(t-T))= (1-e^{-Ts})/s^2$$

9.- Hallar la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

a)

$$F(s) = \frac{5s + 2}{(s + 1)(s + 2)^2}$$

b)

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)}$$

c)

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)^2}$$

Solución:

Para obtener la transformada inversa de Laplace de estas funciones, debemos de descomponerlas en fracciones simples cada una de ellas.

a)

$$F(s) = \frac{5s + 2}{(s + 1)(s + 2)^2} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 2} + \frac{C}{(s + 2)^2}$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{5s + 2}{(s + 2)^2} \right|_{s=-1} = -3 \\ B &= \left. \frac{d}{ds} \left[\frac{5s + 2}{(s + 1)} \right] \right|_{s=-2} = 3 \\ C &= \left. \frac{5s + 2}{(s + 1)} \right|_{s=-2} = 8 \end{aligned}$$

quedando $F(s)$ como:

Automática: problemas resueltos

$$F(s) = -\frac{3}{s+1} + \frac{3}{(s+2)} + \frac{8}{(s+2)^2}$$

y aplicando la transformada inversa de Laplace obtenemos $f(t)$ como:

$$f(t) = -3e^{-t} + 3e^{-2t} + 8te^{-2t}$$

Su representación gráfica la mostramos en la figura 2.3.

b)

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s^2} + \frac{b}{(s - j\omega)} + \frac{a}{(s + j\omega)}$$

donde:

$$c_1 = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{(s^2 + \omega^2)} \right] \Big|_{s=0} = -\frac{2s}{(s^2 + \omega^2)^2} \Big|_{s=0} = 0$$

$$c_2 = \frac{1}{(s^2 + \omega^2)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{\omega^2}$$

$$b = \frac{1}{s^2(s + j\omega)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{j}{2\omega^3}$$

$$a = \frac{1}{s^2(s - j\omega)} \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{j}{2\omega^3}$$

por lo que $F(s)$ la podemos expresar como:

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)} = \frac{1}{\omega^2 s^2} + \frac{j}{2\omega^3(s - j\omega)} - \frac{j}{2\omega^3(s + j\omega)}$$

Si aplicamos la transformada inversa de Laplace a $F(s)$ obtenemos que:

$$f(t) = \frac{1}{\omega^2} t + \frac{j}{2\omega^3} e^{j\omega t} - \frac{j}{2\omega^3} e^{-j\omega t} = \frac{t}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^3} \text{sen } \omega t$$

donde hemos tenido en cuenta que:

$$\text{sen } \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

c)

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)^2} =$$

$$= \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s^2} + \frac{b_1}{(s - j\omega)} + \frac{b_2}{(s - j\omega)^2} + \frac{a_1}{(s + j\omega)} + \frac{a_2}{(s + j\omega)^2}$$

donde:

$$c_1 = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} \right] \Big|_{s=0} = -\frac{2(s^2 + \omega^2)2s}{(s^2 + \omega^2)^4} \Big|_{s=0} = 0$$

$$c_2 = \frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{\omega^4}$$

$$b_1 = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s^2(s + j\omega)^2} \right] \Big|_{s=j\omega} = \frac{3j}{4\omega^5}$$

$$b_2 = \frac{1}{s^2(s + j\omega)^2} \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{4\omega^4}$$

$$a_1 = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s^2(s - j\omega)^2} \right] \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{3j}{4\omega^5}$$

$$a_2 = \frac{1}{s^2(s - j\omega)^2} \Big|_{s=-j\omega} = \frac{1}{4\omega^4}$$

por lo que $F(s)$ la podemos expresar como:

$$F(s) = \frac{1}{\omega^4} \frac{1}{s^2} + \frac{3j}{4\omega^5} \frac{1}{(s - j\omega)} + \frac{1}{4\omega^4} \frac{1}{(s - j\omega)^2} -$$

$$- \frac{3j}{4\omega^5} \frac{1}{(s + j\omega)} + \frac{1}{4\omega^4} \frac{1}{(s + j\omega)^2}$$

Si aplicamos la transformada inversa de Laplace a $F(s)$ obtenemos que:

Automática: problemas resueltos

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{t}{\omega^4} + \frac{3j}{4\omega^5} e^{j\omega t} + \frac{1}{4\omega^4} t e^{j\omega t} - \frac{3j}{4\omega^5} e^{-j\omega t} + \frac{1}{4\omega^4} t e^{-j\omega t} = \\ &= \frac{t}{\omega^4} - \frac{3}{2\omega^5} \operatorname{sen} \omega t + \frac{t}{2\omega^4} \cos \omega t \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que:

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\operatorname{sen} \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

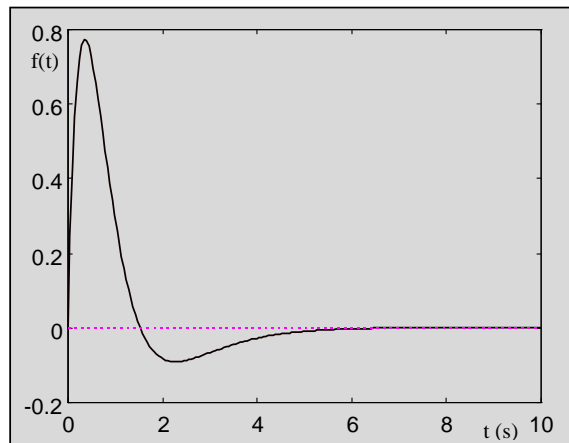


figura 2.3

10.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $2\ddot{x} + 7\dot{x} + 3x = 0; \quad x(0) = 3; \quad \dot{x}(0) = 0.$

b) $\dot{x} + 2x = \delta(t); \quad x(0_-) = 0.$

c) $\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0; \quad x(0) = a; \quad \dot{x}(0) = b; \quad \text{con } a \text{ y } b \text{ constantes.}$

d) $\dot{x} + ax = A \operatorname{sen} \omega t; \quad x(0) = b.$

e) $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0; \quad x(0) = a; \quad \dot{x}(0) = b; \quad \text{con } a \text{ y } b \text{ constantes.}$

f) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 3; \quad x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = 0; \quad \text{con } a \text{ y } b \text{ constantes.}$

Solución:

La resolución de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes utilizando la transformada de Laplace la realizamos en tres etapas:

- Etapa primera:

Calcular la transformada de Laplace de la ecuación diferencial aplicando el teorema de diferenciación y la linealidad de la propia transformada.

- Etapa segunda:

Despejar $X(s)$ como la transformada de Laplace de la solución de la ecuación diferencial.

- Etapa tercera :

Obtener $x(t)$ como la transformada inversa de Laplace de $X(s)$.

Apliquemos estas tres etapas a cada una de las ecuaciones diferenciales que deseamos resolver.

a) $2\ddot{x} + 7\dot{x} + 3x = 0; \quad x(0) = 3; \quad \dot{x}(0) = 0$

Automática: problemas resueltos

Etapa primera:

$$2 \left[s^2 X(s) - sx(0) - x(\dot{0}) \right] + 7[sX(s) - x(0)] + 3X(s) = 0$$

$$2s^2 X(s) - 6s + 7sX(s) - 21 + 3X(s) = 0$$

Etapa segunda:

$$X(s) = \frac{6s + 21}{2s^2 + 7s + 3} = \frac{3s + 10.5}{s^2 + 3.5s + 1.5}$$

Etapa tercera:

Para obtener la transformada inversa de Laplace, debemos descomponer $X(s)$ en fracciones simples en la forma:

$$X(s) = \frac{A}{s + 3} + \frac{B}{s + 0.5}$$

donde:

$$A = \left. \frac{(3s + 10.5)}{(s + 0.5)} \right|_{s=-3} = -0.6$$
$$B = \left. \frac{(3s + 10.5)}{(s + 3)} \right|_{s=-0.5} = 3.6$$

por lo que:

$$X(s) = -\frac{0.6}{s + 3} + \frac{3.6}{s + 0.5}$$

y finalmente aplicamos la transformada de Laplace para obtener $x(t)$ como:

$$x(t) = -0.6e^{-3t} + 3.6e^{-0.5t}$$

La representación gráfica de $x(t)$ la podemos observar en la figura 2.4.

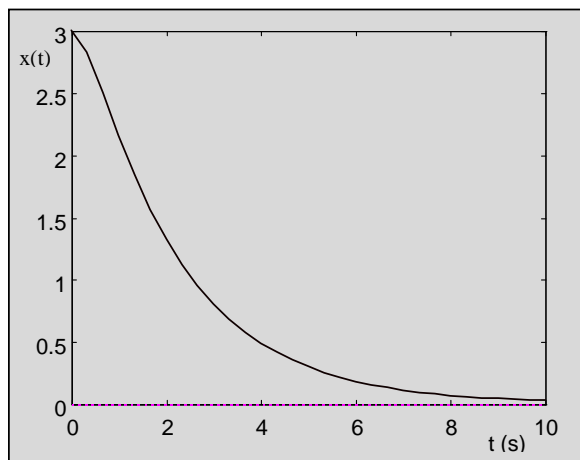


figura 2.4

b) $\dot{x} + 2x = \delta(t); \quad x(0_-) = 0$

Etapa primera:

$$[sX(s) - x(0)] + 2X(s) = 1;$$

$$sX(s) + 2X(s) = 1;$$

Etapa segunda:

$$X(s) = \frac{1}{s+2}$$

Etapa tercera:

Aplicamos la transformada inversa de Laplace para obtener $x(t)$ como:

$$x(t) = e^{-2t} I(t)$$

La representación gráfica de $x(t)$ la podemos observar en la figura 2.5.

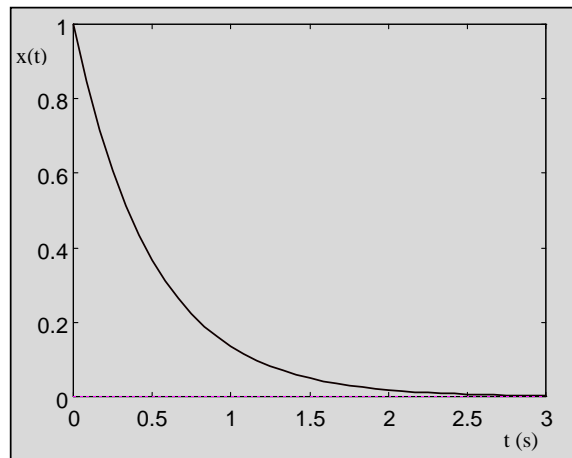


figura 2.5

c) $\ddot{x} + 2\xi\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 0$; $x(0) = a$; $\dot{x}(0) = b$; con a y b constantes.

Etapa primera:

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 2\xi\omega_n [sX(s) - x(0)] + \omega_n^2 X(s) = 0;$$

$$s^2 X(s) - sa - b + 2\xi\omega_n [sX(s) - a] + \omega_n^2 X(s) = 0;$$

Etapa segunda:

$$X(s) = \frac{as + b + 2a\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Etapa tercera:

Para obtener la transformada inversa de Laplace, debemos descomponer $X(s)$ en fracciones simples en la forma:

$$X(s) = \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2}$$

donde:

$$s_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$s_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$A = \frac{(as + b + 2a\xi\omega_n)}{(s - s_2)} \Big|_{s=s_1} = \frac{b + a\xi\omega_n + a\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}{2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

$$B = \frac{(as + b + 2a\xi\omega_n)}{(s - s_1)} \Big|_{s=s_2} = -\frac{b + a\xi\omega_n - a\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}{2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

por lo que:

$$X(s) = \frac{b + a\xi\omega_n + a\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}{2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}} \frac{1}{s + \xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}} - \frac{b + a\xi\omega_n - a\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}{2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}} \frac{1}{s + \xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

y finalmente aplicamos la transformada inversa de Laplace para obtener $x(t)$ como:

$$x(t) = \frac{b + a\xi\omega_n + a\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}{2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})t} - \frac{b + a\xi\omega_n - a\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}{2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})t}$$

d) $\dot{x} + ax = A \sin \omega t; \quad x(0) = b$

Etapa primera:

$$[sX(s) - x(0)] + aX(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2};$$

$$[sX(s) - b] + aX(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2};$$

Etapa segunda:

Automática: problemas resueltos

$$X(s) = \frac{A\omega + bs^2 + b\omega^2}{(s^2 + \omega^2)(s + a)}$$

Etapa tercera:

Para obtener la transformada inversa de Laplace, debemos descomponer $X(s)$ en fracciones simples en la forma:

$$X(s) = \frac{A\omega + bs^2 + b\omega^2}{(s^2 + \omega^2)(s + a)} = \frac{a_1}{s + \omega j} + \frac{a_2}{s - \omega j} + \frac{a_3}{s + a}$$

ya que en $s = -a$ la función de transferencia tiene un polo real y en $s_{1,2} = \alpha \pm \beta j = \pm \omega j$ tiene dos polos complejos conjugados.

Si descomponemos la solución de la ecuación diferencial en dos partes: una, la debida al polo real, y otra, la debida a los polos complejos conjugados, podemos obtenerlas por métodos distintos.

Para la parte asociada al polo real obtendremos el residuo correspondiente al polo en $s = -a$ que vale:

$$a_1 = \left. \frac{A\omega + bs^2 + b\omega^2}{(s^2 + \omega^2)} \right|_{s=-a} = \frac{A\omega + ba^2 + b\omega^2}{(a^2 + \omega^2)}$$

y la parte de solución correspondiente a los polos complejos conjugados la vamos a obtener a partir de la función definida en la forma:

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \frac{X(s)(s - s_1)(s - s_2)}{j\beta} = \frac{(A\omega + bs^2 + b\omega^2)(s^2 + \omega^2)}{(s + a)(s^2 + \omega^2)j\omega} = \\ &= \frac{(A\omega + bs^2 + b\omega^2)}{(s + a)j\omega} \end{aligned}$$

que evaluada en el polo complejo con parte imaginaria positiva

$$\Gamma(s = j\omega) = -\frac{A\omega}{\omega^2 + a^2} - \frac{Aaj}{\omega^2 + a^2} = \Gamma_r + \Gamma_i j$$

con lo que podemos escribir que la solución de la ecuación diferencial debida a los polos complejos conjugados toma la forma:

$$x_{1,2}(t) = e^{\alpha t} [\Gamma_r \cos \beta t - \Gamma_i \sin \beta t] = -\frac{A\omega}{\omega^2 + a^2} \cos \omega t + \frac{Aa}{\omega^2 + a^2} \sin \omega t$$

y la solución global de la ecuación diferencial será:

$$x(t) = \frac{A\omega + ba^2 + b\omega^2}{a^2 + \omega^2} e^{-at} - \left(\frac{A\omega}{\omega^2 + a^2} \cos \omega t - \frac{Aa}{\omega^2 + a^2} \sin \omega t \right)$$

e) $x'' + 3x' + 2x = 0$; $x(0) = a$; $\dot{x}(0) = b$; con a y b constantes

Etapa primera:

$$\left[s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) \right] + 3[sX(s) - x(0)] + 2X(s) = 0;$$

$$s^2 X(s) - as - b + 3sX(s) - 3a + 2X(s) = 0$$

Etapa segunda:

$$X(s) = \frac{as + b + 3a}{s^2 + 3s + 2}$$

Etapa tercera:

Para obtener la transformada inversa de Laplace, debemos descomponer $X(s)$ en fracciones simples en la forma:

$$X(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

donde:

$$A = \frac{(as + b + 3a)}{(s+2)} \Big|_{s=-1} = 2a + b$$

$$B = \frac{(as + b + 3a)}{(s+1)} \Big|_{s=-2} = -(a + b)$$

por lo que:

$$X(s) = \frac{2a + b}{s+1} - \frac{a + b}{s+2}$$

Automática: problemas resueltos

y finalmente aplicamos la transformada de Laplace para obtener $x(t)$ como:

$$x(t) = (2a + b)e^{-t} - (a + b)e^{-2t}$$

$$f) \ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 3; \quad x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = 0$$

Etapa primera:

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 2[sX(s) - x(0)] + 5X(s) = \frac{3}{s}$$

$$s^2 X(s) + 2sX(s) + 5X(s) = \frac{3}{s}$$

Etapa segunda:

$$X(s) = \frac{3}{(s^2 + 2s + 5)s}$$

Etapa tercera:

Para obtener la transformada inversa de Laplace, debemos descomponer $X(s)$ en fracciones simples en la forma:

$$X(s) = \frac{3}{(s^2 + 2s + 5)s} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s - s_1} + \frac{a_3}{s - s_2}$$

ya que en $s=0$ la función de transferencia tiene un polo, y en $s_{1,2} = \alpha \pm \beta j = -1 \pm 2j$ tiene dos polos complejos conjugados.

Si descomponemos la solución de la ecuación diferencial en dos partes: una, la debida al polo real, y otra, la debida a los polos complejos conjugados, podemos obtenerlas por métodos distintos.

Para la parte asociada al polo real obtendremos el residuo correspondiente al polo en $s=0$ que vale:

$$a_1 = \left. \frac{3}{(s^2 + 2s + 5)} \right|_{s=0} = \frac{3}{5}$$

y la parte de solución correspondiente a los polos complejos conjugados la vamos a obtener a partir de la función definida en la forma:

$$\Gamma(s) = \frac{X(s)(s - s_1)(s - s_2)}{j\beta} = \frac{3}{sj2}$$

que evaluada en el polo complejo con parte imaginaria positiva:

$$\Gamma(s = -1 + j2) = -\frac{6}{10} + \frac{3j}{10} = \Gamma_r + \Gamma_i j$$

con lo que podemos afirmar que la solución de la ecuación diferencial debida a los polos complejos conjugados toma la forma:

$$x_{1,2}(t) = e^{\alpha} [\Gamma_r \cos \beta t - \Gamma_i \operatorname{sen} \beta t] = -e^{-t} \left[\frac{3}{5} \cos 2t + \frac{3}{10} \operatorname{sen} 2t \right]$$

y la solución global de la ecuación diferencial será:

$$x(t) = \frac{3}{5} - e^{-t} \left[\frac{3}{5} \cos 2t + \frac{3}{10} \operatorname{sen} 2t \right]$$

Automática: problemas resueltos

11.- Resolver la ecuación integro-diferencial dada por:

$$\ddot{y}(t) + \int_0^t e^{2(t-x)} \dot{y}(x) dx = e^{2t}$$

Solución:

Vamos a resolver la ecuación por dos métodos:

Método 1:

Si suponemos condiciones iniciales nulas y aplicamos la transformada de Laplace en los dos miembros de la ecuación, obtenemos que:

$$s^2 Y(s) + L \left[\int_0^t e^{2(t-x)} \dot{y}(x) dx \right] = \frac{1}{s-2}$$

Si suponemos que $L[y(x)] = Y(s)$ y aplicamos que:

$$L[\dot{f}(x)] = sF(s)$$

bajo condiciones iniciales nulas, tenemos que:

$$L[\dot{y}(x)] = sY(s)$$

Como:

$$L[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$$

podemos poner que:

$$L[e^{-2x} \dot{y}(x)] = (s+2)Y(s+2)$$

La propiedad

$$L \left[\int_0^t f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s}$$

nos permite obtener que:

$$L\left[\int_0^t (e^{-2x}) \dot{y}(x) dx\right] = \frac{(s+2)Y(s+2)}{s}$$

Finalmente, si multiplicamos por e^{2t} nos permite obtener que:

$$L\left[\int_0^t e^{2t} e^{-2x} \dot{y}(x) dx\right] = \frac{sY(s)}{s-2}$$

Este resultado lo sustituimos en la ecuación de partida y obtenemos que:

$$s^2 Y(s) + \frac{sY(s)}{s-2} = \frac{1}{s-2}$$

de donde:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 - 2s + 1)}$$

cuya descomposición en fracciones simples toma la forma:

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

donde:

$$A = \left. \frac{s}{s(s-1)^2} \right|_{s=0} = 1$$

$$B = \frac{1}{(2-1)!} \left. \frac{d}{ds} \frac{(s-1)^2}{s(s-1)^2} \right|_{s=1} = -1$$

$$C = \left. \frac{(s-1)^2}{s(s-1)^2} \right|_{s=1} = 1$$

por lo que:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

y aplicando la transformada de Laplace en ambos miembros:

Automática: problemas resueltos

$$y(t) = 1 - e^t + te^t$$

cuya representación gráfica la podemos observar en la figura 2.6.

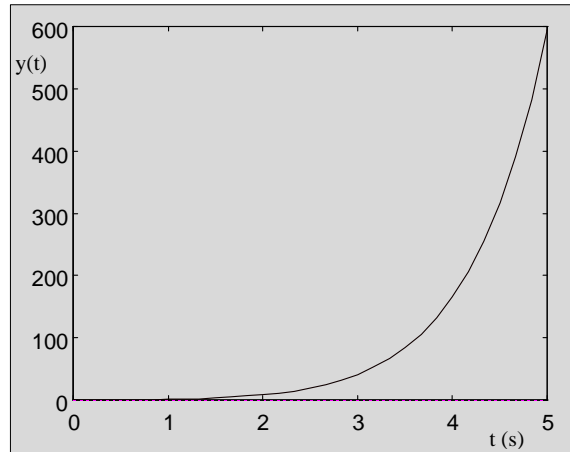


figura 2.6

Método 2:

Si definimos $F(s)$ como

$$F(s) = L \left[\int_0^t e^{2(t-x)} \dot{y}(x) dx \right]$$

y derivamos respecto de t aplicando que:

$$L[\dot{h}(t)] = sH(s)$$

obtenemos:

$$L \left[2e^{2t} \int_0^t e^{-2x} \dot{y}(x) dx + \dot{y}(t) \right] = sF(s)$$

de donde:

$$2F(s) + sY(s) = sF(s)$$

con lo que:

$$F(s) = \frac{sY(s)}{s-2}$$

y si la sustituimos en la de partida obtenemos que:

$$s^2Y(s) + \frac{sY(s)}{s-2} = \frac{1}{s-2}$$

y continuamos como en el método 1.

12.- El sistema de la figura 2.7 está inicialmente en reposo. Suponiendo que el carro inicia el movimiento por una fuerza impulsiva cuya intensidad es unitaria. ¿Puede ser detenido por otra fuerza impulsiva similar?

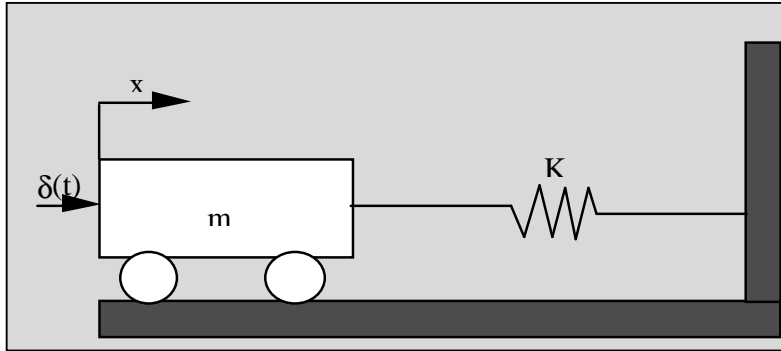


figura 2.7

Solución:

La ecuación de movimiento del sistema es

$$m\ddot{x}(t) + Kx(t) = \delta(t) + A\delta(t - T)$$

donde $\delta(t)$ es la fuerza impulsiva inicial y $\delta(t-T)$ es otra similar pero retrasada T segundos en el tiempo.

Las condiciones iniciales de posición y velocidad son nulas, por lo que al aplicarle la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación, obtenemos que:

$$(ms^2 + K)X(s) = 1 + Ae^{-sT}$$

de donde:

$$X(s) = \frac{1 + Ae^{-sT}}{ms^2 + K} = \frac{1}{ms^2 + K} + \frac{Ae^{-sT}}{ms^2 + K}$$

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{K}{m}} + \frac{\frac{A}{m}e^{-sT}}{s^2 + \frac{K}{m}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{Km}} \frac{\sqrt{\frac{K}{m}}}{s^2 + \frac{K}{m}} + \frac{A}{\sqrt{Km}} \frac{\sqrt{\frac{K}{m}}e^{-sT}}{s^2 + \frac{K}{m}}
\end{aligned}$$

Como:

$$\begin{aligned}
L[\text{sen } \omega t] &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\
L[f(t-T)I(t-T)] &= e^{-Ts}F(s) \quad \text{con } T \geq 0
\end{aligned}$$

podemos aplicar la transformada inversa de Laplace a $X(s)$ y obtener que

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{Km}} \text{sen} \sqrt{\frac{K}{m}}t + \frac{A}{\sqrt{Km}} (\text{sen} \sqrt{\frac{K}{m}}(t-T))I(t-T)$$

Para que la masa se detenga tras aplicar la segunda fuerza impulsiva, debe de cumplirse que:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{Km}} \text{sen} \sqrt{\frac{K}{m}}t + \frac{A}{\sqrt{Km}} (\text{sen} \sqrt{\frac{K}{m}}(t-T))I(t-T) = 0 \quad \forall t \geq T$$

lo que obliga a que:

$$T = \frac{A=1}{\sqrt{\frac{K}{m}}} \frac{(2h+1)\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}}; \quad h = 0,1,2,\dots$$

ya que para estos valores se cumple que:

$$\text{sen} \sqrt{\frac{K}{m}}t = -A(\text{sen} \sqrt{\frac{K}{m}}(t-T))I(t-T) \quad \forall t \geq T$$

Automática: problemas resueltos

Por tanto, la masa m a la que inicialmente le aplicamos una fuerza impulsiva $\delta(t)$, puede ser detenida por otra retrasada en el tiempo y con valor:

$$f(t) = \delta\left(t - \frac{(2h+1)\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}}\right); \quad h = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Tema 3:

Descripción externa

13.- Simplificar el diagrama de bloques que aparece en la *figura 3.1* y obtener la función de transferencia de lazo cerrado $C(s)/R(s)$.

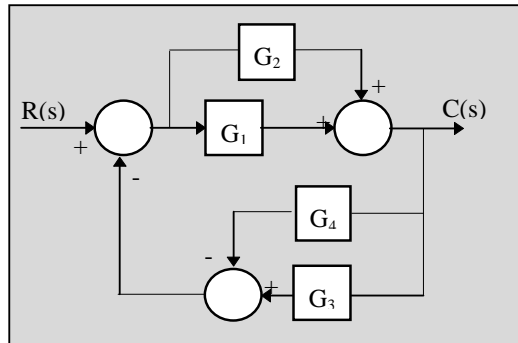


figura 3.1

Solución:

La regla general para simplificar un diagrama de bloques es reducir los lazos internos de realimentación de los que conocemos directamente su función de transferencia de lazo cerrado. Pero en la mayoría de las ocasiones, estos lazos de realimentación aparecen mezclados con otras estructuras que hacen que no podamos aplicar directamente dichas funciones, y sea necesario aplicar previamente otras técnicas como desplazar puntos de bifurcación y puntos de suma, intercambiar los puntos de suma u otra cualquier regla del álgebra de diagramas de bloques.

En este caso, procederemos inicialmente a sumar por un lado los bloques G_1 y G_2 (figura 3.2) y por otro los bloques G_3 y G_4 (figura 3.3).

Este diagrama corresponde a un sistema de lazo cerrado cuya reducción la obtenemos eliminando el lazo de realimentación y llegando al diagrama de bloques de la figura 3.4, del cual deducimos directamente la función de transferencia.

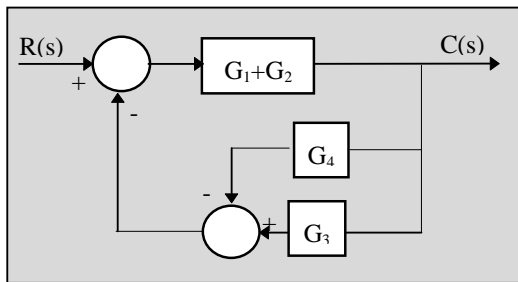


figura 3.2

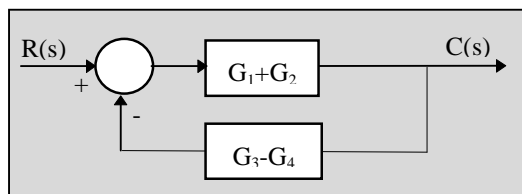


figura 3.3

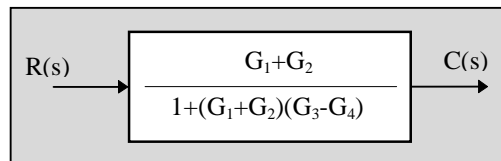


figura 3.4

14.- Simplificar el diagrama de bloques que aparece en la *figura 3.5* y obtener la función de transferencia de lazo cerrado $C(s)/R(s)$.

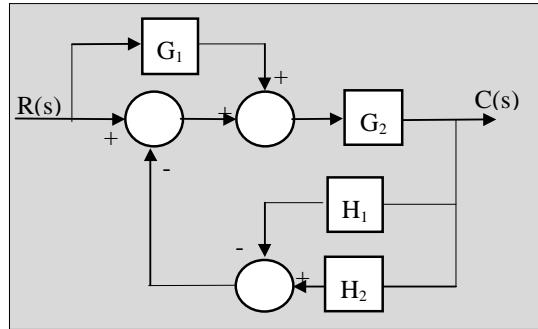


figura 3.5

Solución:

En el diagrama de bloques de la *figura 3.5*, procederemos inicialmente a intercambiar el orden de los dos sumadores que no están en la realimentación (*figura 3.6*), así como, a sumar H_1 y H_2 (*figura 3.7*).

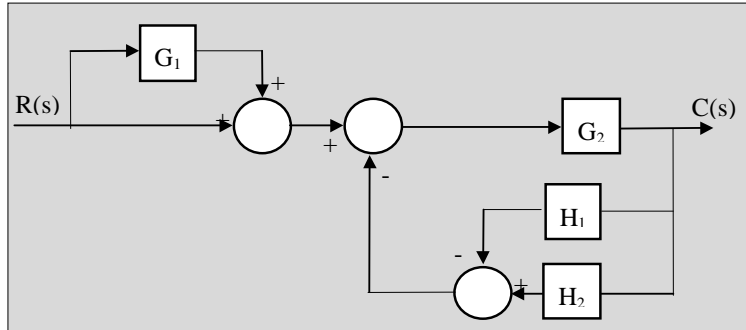


figura 3.6

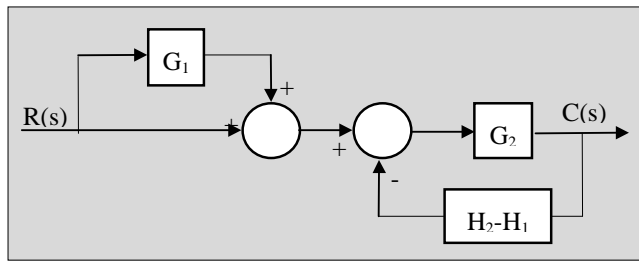


figura 3.7

Seguidamente resolvemos, por una parte, el lazo con realimentación H_1-H_2 y, por otra, el sumador de la entrada para tener el diagrama de bloques de la figura 3.8 que permite obtener la función de transferencia, como muestra la figura 3.9.

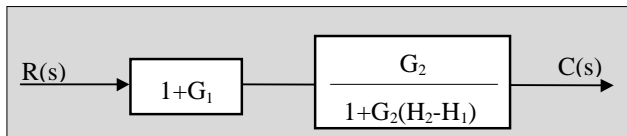


figura 3.8

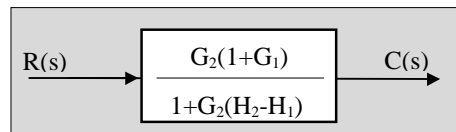


figura 3.9

15.- Simplificar el diagrama de bloques que aparece en la *figura 3.10* y obtener la función de transferencia de lazo cerrado $C(s)/R(s)$.

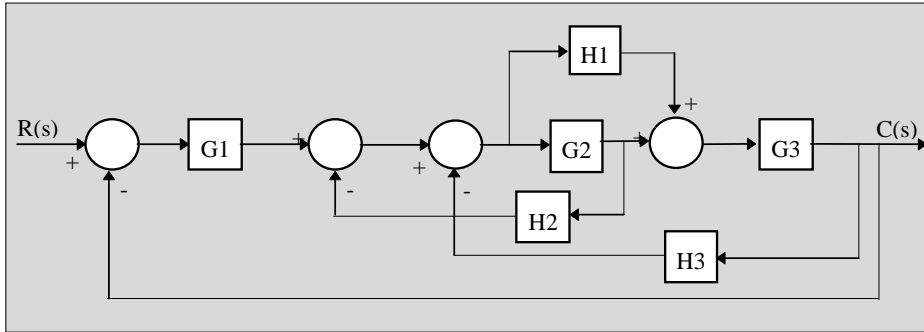


figura 3.10

Solución:

En este caso, el diagrama de bloques de la *figura 3.11* lo obtenemos realizando dos modificaciones en el de la *figura 3.10*. Por un lado, intercambiamos el orden de los sumadores de los lazos con realimentación H_2 y H_3 y, por otro, situamos por detrás de G_2 la bifurcación que inicialmente tiene por delante, lo que lleva aparejado el cambio del bloque H_1 por otro de valor H_1/G_2 , según el álgebra de diagrama de bloques.

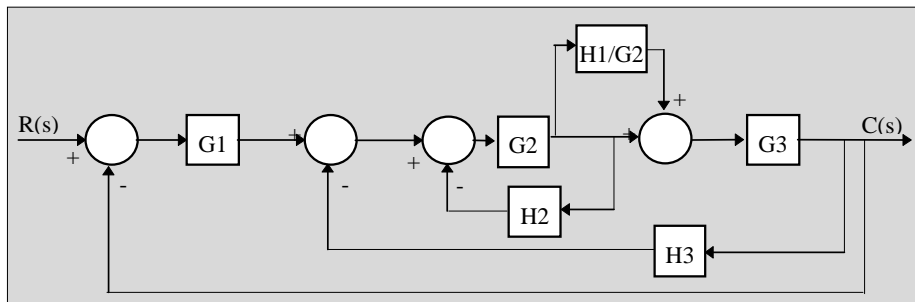


figura 3.11

Eliminando el lazo con realimentación H_2 y el sumador que precede a G_3 , llegamos al diagrama de la figura 3.12, que nos permite, mediante la eliminación del lazo con realimentación H_3 llegar al diagrama de bloques de la figura 3.13.

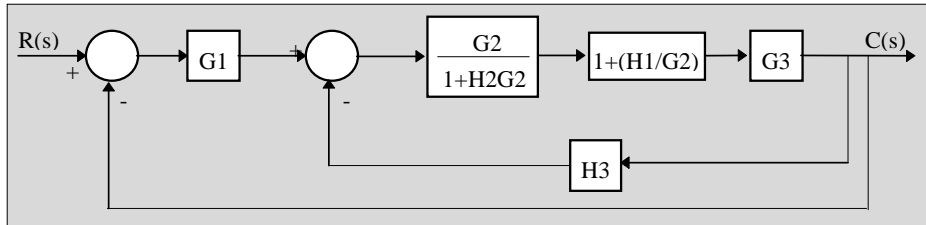


figura 3.12

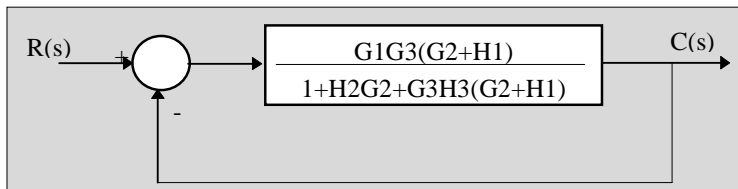


figura 3.13

Por último, resolviendo el diagrama de bloques con realimentación unitaria llegamos al diagrama de bloques de la figura 3.14, que nos muestra directamente la función de transferencia.

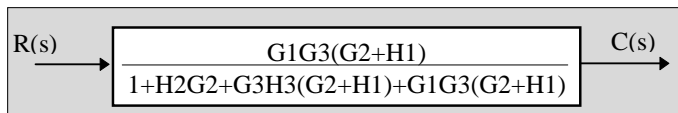


figura 3.14

16.- Simplificar el diagrama de bloques que aparece en la *figura 3.15* y obtener la función de transferencia de lazo cerrado $C(s)/R(s)$.

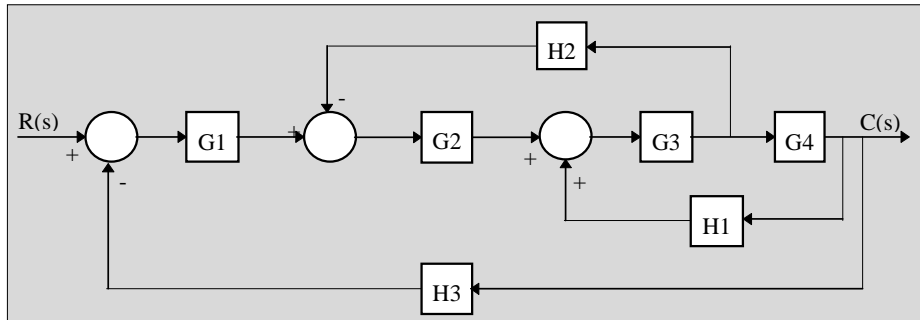


figura 3.15

Solución:

En el diagrama de bloques de la *figura 3.15*, la bifurcación que precede al bloque G_4 la desplazamos detrás de dicho bloque, que lleva aparejada la sustitución del bloque H_2 por el de H_2/G_4 , obteniéndose el diagrama de bloques de la *figura 3.16*.

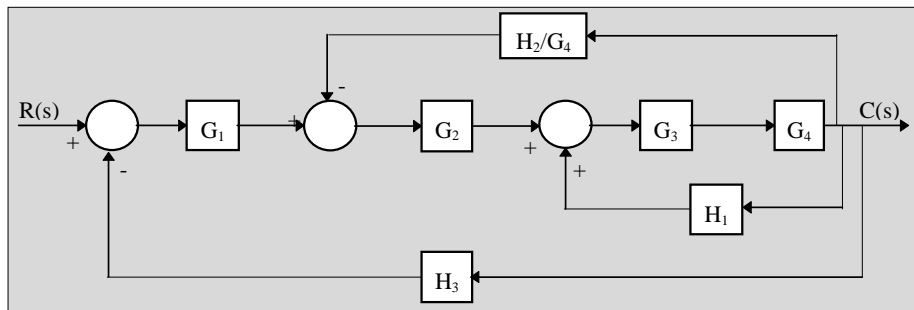


figura 3.16

En este nuevo diagrama eliminamos el lazo con realimentación H_1 , obteniéndose el diagrama de bloques de la *figura 3.17* en el que podemos

eliminar el lazo con realimentación H_2/G_4 , y logramos a su vez otro diagrama, el de la figura 3.18.

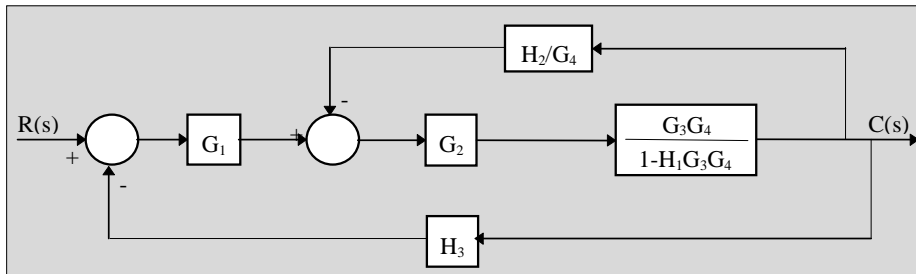


figura 3.17

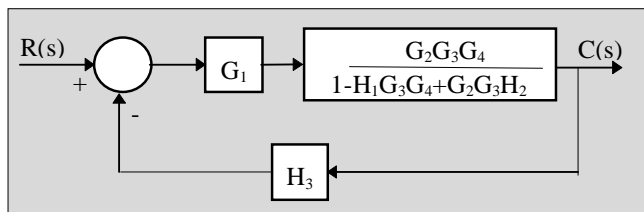


figura 3.18

Finalmente, de nuevo podemos eliminar otro lazo, esta vez el de realimentación H_3 , y elaboramos el diagrama de bloques de la figura 3.19, que muestra directamente la función de transferencia.

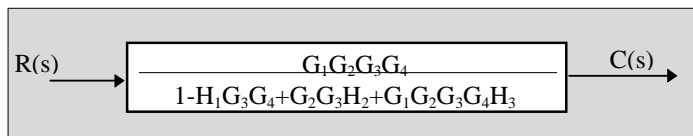


figura 3.19

17.- Simplificar el diagrama de bloques que aparece en la *figura 3.20* y obtener la función de transferencia de lazo cerrado $C(s)/R(s)$.

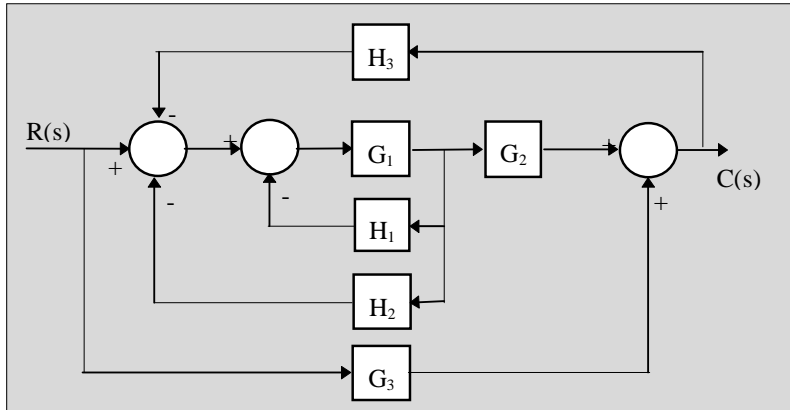


figura 3.20

Solución:

Para reducir el diagrama de bloques de la *figura 3.20*, inicialmente eliminamos los lazos con realimentaciones H_1 (*figura 3.21*) y H_2 (*figura 3.22*).

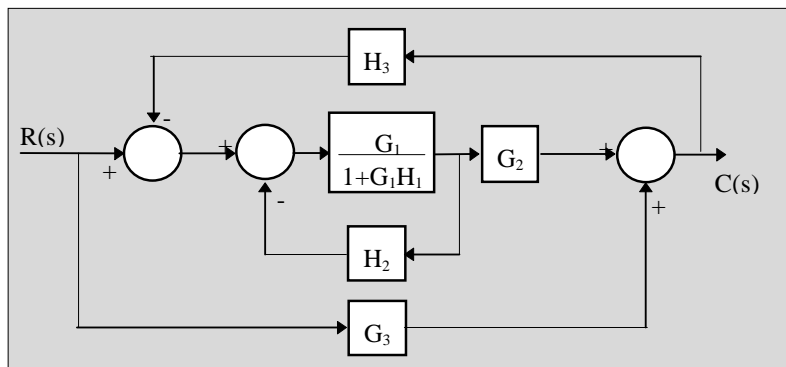


figura 3.21

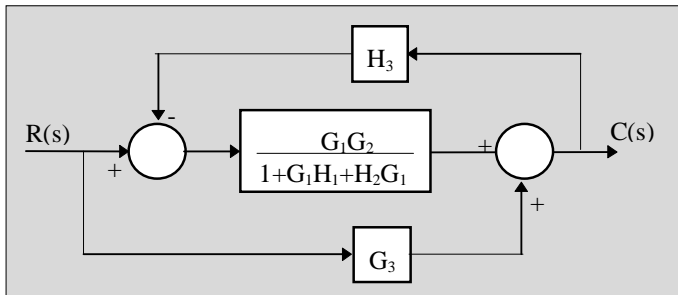


figura 3.22

El sumador de la izquierda lo desplazamos hacia la derecha (figura 3.23) y lo intercambiamos de posición con el otro (figura 3.24).

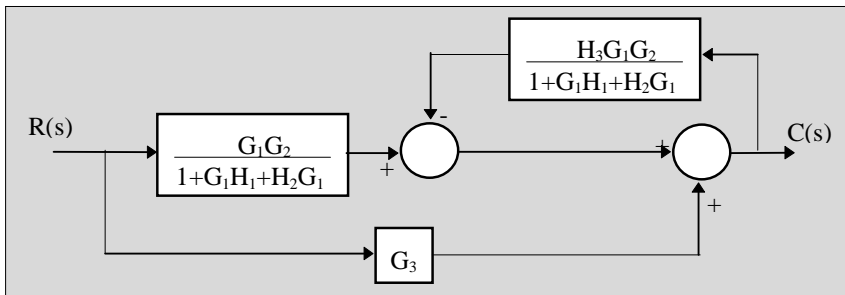


figura 3.23

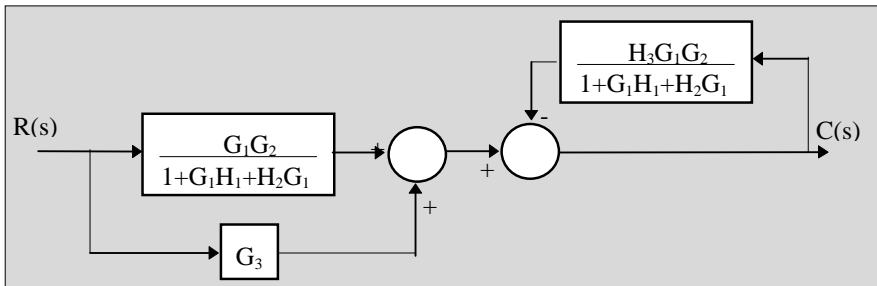


figura 3.24

Automática: problemas resueltos

Finalmente, realizamos el sumador de entrada y el bucle de realimentación de salida, dando como resultado la función de transferencia buscada (figura 3.25).

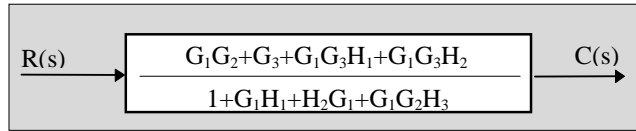


figura 3.25

18.- Para los sistemas mostrados en la *figura 3.26*, donde K es una ganancia ajustable y $G(s)$ y $H(s)$ son componentes fijas, obtener la respuesta a la aplicación simultánea de la entrada de referencia $R(s)$ y de la perturbación $N(s)$. Razonar, en cada caso, como elegir la ganancia ajustable K que minimice el efecto de las perturbaciones.

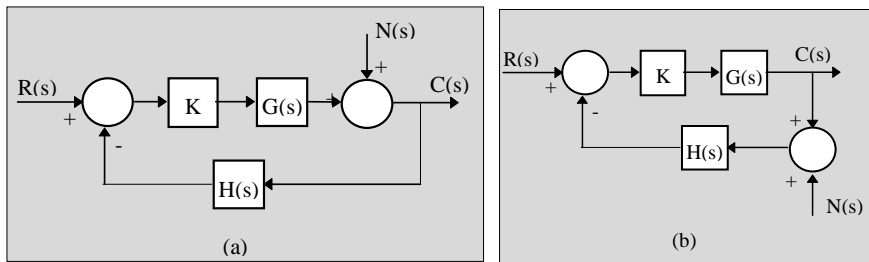


figura 3.26

Solución:

La *figura 3.26(a)* muestra un sistema de lazo cerrado sometido a una perturbación en la función de transferencia directa. Cuando dos o más entradas están presentes en un sistema lineal, cada entrada puede tratarse independientemente de la otra; y la salida total será la suma de las salidas correspondientes a cada una de las entradas cuando el resto de las entradas son nulas. En este caso, inicialmente calculamos la salida cuando no hay perturbación, como muestra el diagrama de *figura 3.27* que al eliminar el lazo realimentado obtenemos el diagrama de bloques de *figura 3.28* en donde aparece la salida cuando no hay perturbación de entrada.

Seguidamente, procedemos a obtener la salida cuando sólo tenemos como entrada la perturbación, tal como mostramos en el diagrama de bloques de la *figura 3.29*, pasando posteriormente a eliminar el lazo realimentado y obtener la salida buscada (*figura 3.30*)

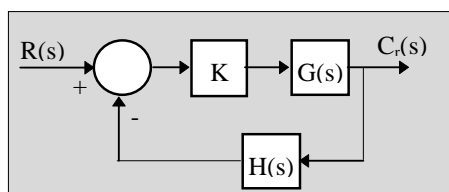


figura 3.27

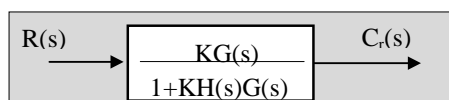


figura 3.28

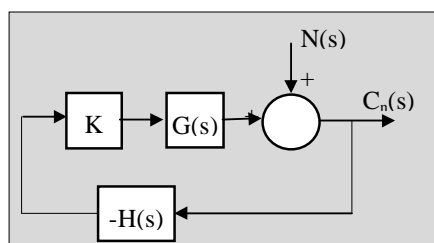


figura 3.29

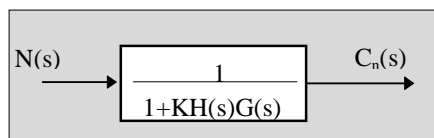


figura 3.30

La respuesta buscada será la suma de las dos anteriores, por un lado la debida a la entrada de referencia $R(s)$ y por otro la perturbación $N(s)$, es decir

$$C(s) = C_r + C_n(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} R(s) + \frac{1}{1 + KG(s)H(s)} N(s)$$

Si K tiende a hacerse muy grande, la función de transferencia de lazo cerrado $C_n(s)/N(s)$ se convierte en casi cero, suprimiéndose el efecto de la perturbación, y la función de transferencia de lazo cerrado $C_r(s)/R(s)$ tiende a $1/H(s)$ haciéndose independiente de $G(s)$ e inversamente proporcional a $H(s)$, de modo que las variaciones de $G(s)$ no afectan a la función de transferencia de lazo cerrado $C_r(s)/R(s)$.

Para el diagrama de bloques de figura 3.26(b), en donde la perturbación está en el bloque de realimentación, procedemos de manera similar al caso anterior. Primero obtenemos la respuesta correspondiente a la entrada, con la perturbación anulada como muestra la figura 3.31(a y b).

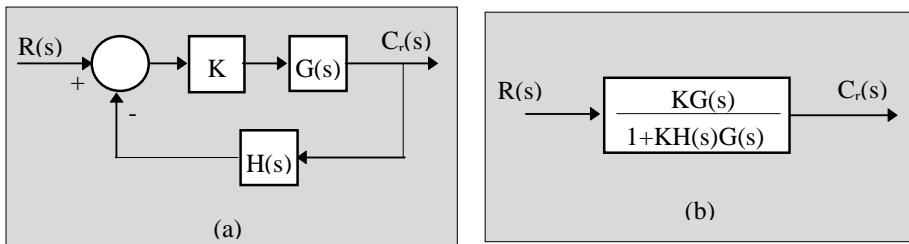


figura 3.31

Seguidamente calculamos la respuesta relativa a la perturbación, con la entrada anulada tal como refleja la figura 3.32(a y b).

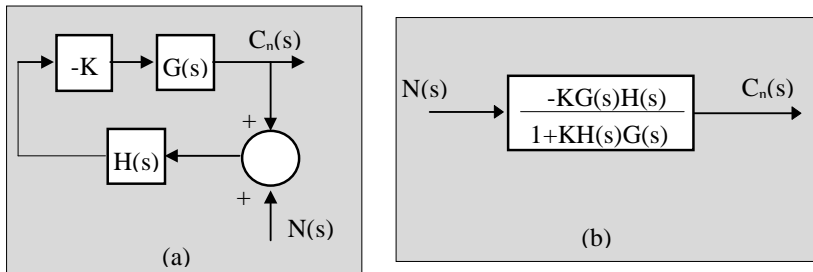


figura 3.32

Finalmente unimos las dos salidas parciales anteriores y obtenemos la salida global correspondiente a las dos entradas y que viene dada por la expresión:

Automática: problemas resueltos

$$C(s) = C_r + C_n(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} R(s) - \frac{KG(s)H(s)}{1 + KG(s)H(s)} N(s)$$

Si K tiende a hacerse muy grande, la función de transferencia de lazo cerrado $C_n(s)/N(s)$ tiende a $N(s)$, no suprimiéndose el efecto de la perturbación y la función de transferencia de lazo cerrado $C_r(s)/R(s)$ tiende a $1/H(s)$, que es comparable con $N(s)$.

Por otra parte, si K tiende a hacerse muy pequeña la función de transferencia de lazo cerrado $C_r(s)/R(s)$ se anula. Por tanto, debemos de llegar a una situación de compromiso a la hora de dar valor a K , para que no sea apreciable el efecto de la perturbación (K grande) ni se anule el efecto de la entrada $R(s)$ (K pequeña).

19.- Para el diagrama de bloques de la *figura 3.33*, obtener la función de transferencia, entendida como la relación entre la salida y las múltiples entradas bajo condiciones iniciales nulas. Explicar qué modificaciones debemos hacer para minimizar el efecto de cada una de las perturbaciones.

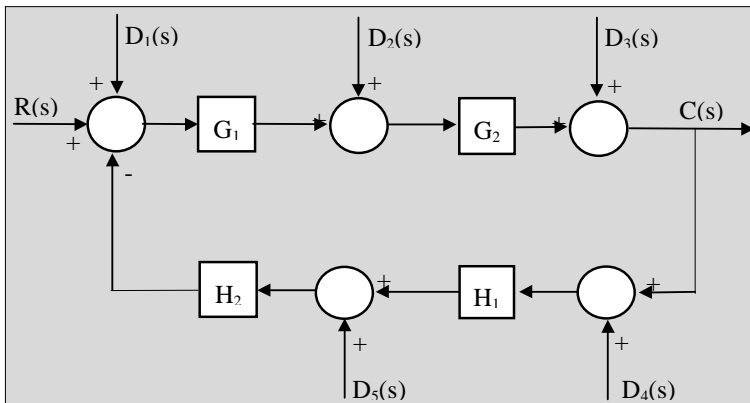


figura 3.33

Solución:

La *figura 3.33* muestra un sistema de lazo cerrado sometido a varias perturbaciones, tanto en la función de transferencia directa como en la de realimentación. En este caso, primero obtenemos la salida cuando no hay perturbaciones, y seguidamente procedemos a obtener la salida cuando sólo tenemos como entrada cada una de las perturbaciones de modo que:

Si $D_1(s)=0$; $D_2(s)=0$; $D_3(s)=0$; $D_4(s)=0$; $D_5(s)=0$;

$$C_R(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H_1 H_2} R(s)$$

Automática: problemas resueltos

$$\text{Si } R(s)=0; D_2(s)=0; D_3(s)=0; D_4(s)=0; D_5(s)=0;$$

$$C_{D_1}(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H_1 H_2} D_1(s)$$

$$\text{Si } R(s)=0; D_1(s)=0; D_3(s)=0; D_4(s)=0; D_5(s)=0;$$

$$C_{D_2}(s) = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H_1 H_2} D_2(s)$$

$$\text{Si } R(s)=0; D_1(s)=0; D_2(s)=0; D_4(s)=0; D_5(s)=0;$$

$$C_{D_3}(s) = \frac{1}{1 + G_1 G_2 H_1 H_2} D_3(s)$$

$$\text{Si } R(s)=0; D_1(s)=0; D_2(s)=0; D_3(s)=0; D_5(s)=0;$$

$$C_{D_4}(s) = \frac{-G_1 G_2 H_1 H_2}{1 + G_1 G_2 H_1 H_2} D_4(s)$$

$$\text{Si } R(s)=0; D_1(s)=0; D_2(s)=0; D_3(s)=0; D_4(s)=0;$$

$$C_{D_5}(s) = \frac{-G_1 G_2 H_2}{1 + G_1 G_2 H_1 H_2} D_5(s)$$

con lo que obtenemos la salida total como suma de todas las calculadas anteriormente:

$$\begin{aligned} C(s) &= C_R(s) + C_{D_1}(s) + C_{D_2}(s) + C_{D_3}(s) + C_{D_4}(s) + C_{D_5}(s) = \\ &= \frac{G_1 G_2 R(s) + G_1 G_2 D_1(s) + G_2 D_2(s) + D_3(s)}{1 + G_1 G_2 H_1 H_2} - \\ &- \frac{H_1 H_2 G_1 G_2 D_4(s) + H_2 G_1 G_2 D_5(s)}{1 + G_1 G_2 H_1 H_2} \end{aligned}$$

Puesto que $D_1(s)$ entra al bucle en el mismo punto que $R(s)$, nada podemos hacer con los parámetros del sistema para separar los dos efectos. El efecto de $D_2(s)$ puede ser reducido si $G_1(s)$ tiene una alta ganancia. El efecto de $D_3(s)$ lo reducimos aumentando $G_1(s)$ o $G_2(s)$. La perturbación $D_4(s)$ tiene efecto pequeño si $H_1(s)H_2(s)$ es pequeño. El efecto de $D_5(s)$ disminuye si $H_2(s)$ es pequeño.

20.- Simplificar el diagrama de bloques que aparece en la *figura 3.34* y obtener la función de transferencia de lazo cerrado $C(s)/R(s)$.

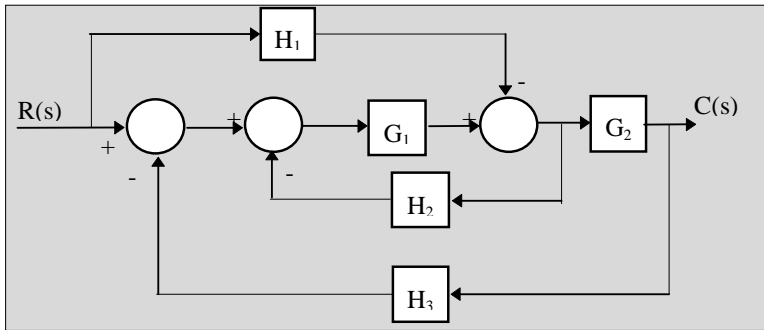


figura 3.34

donde:

$$G_1 = 8; G_2 = \frac{s}{s^2 + s + 10}; H_1 = \frac{3s}{s+1}; H_2 = \frac{2}{s+2}; H_3 = 1$$

Solución:

Inicialmente, anteponeamos el sumador de la derecha en la *figura 3.34* al bloque G_1 , lo que lleva aparejada la modificación del bloque H_1 por el de H_1/G_1 , obteniéndose el diagrama de bloques de la *figura 3.35*.

Seguidamente, en este nuevo diagrama intercambiamos de posición diferentes sumadores sin ninguna consecuencia adicional, para conseguir los diagramas de bloques de la *figura 3.36(a y b)*.

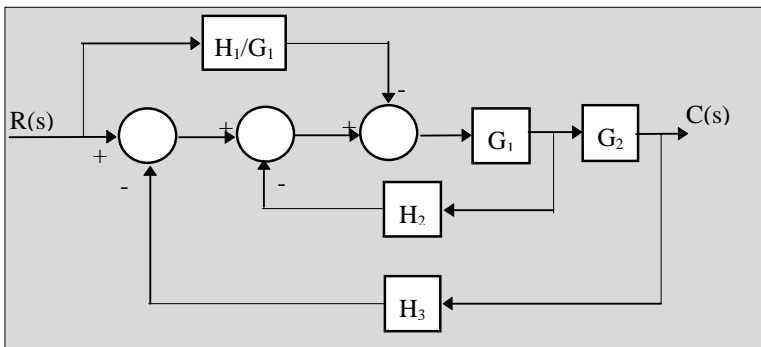
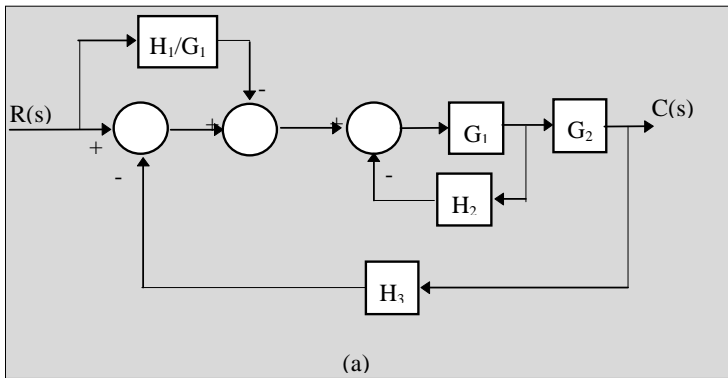
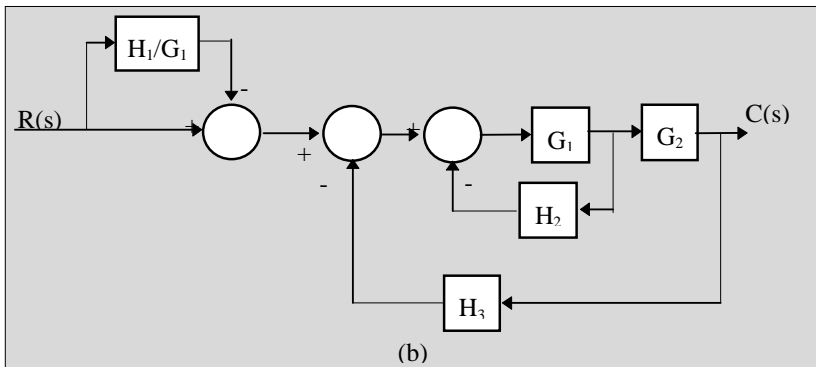


figura 3.35



(a)



(b)

figura 3.36

Por último resolvemos el sumador de entrada (figura 3.37) y los dos bucles realimentados, obteniendo el diagrama de bloques intermedio mostrado en la figura 3.38 y el diagrama de bloques final de la figura 3.39 que me muestra la función de transferencia del sistema descrito por el diagrama de bloques de la figura 3.34.

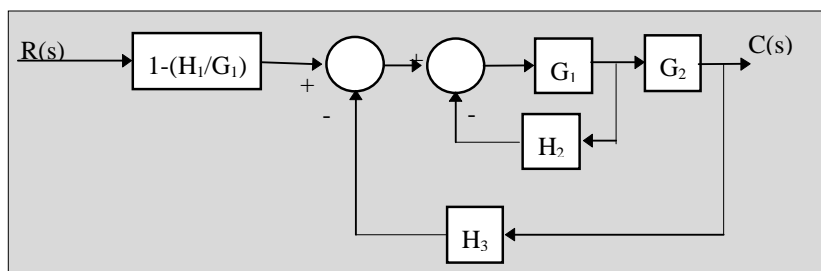


figura 3.37

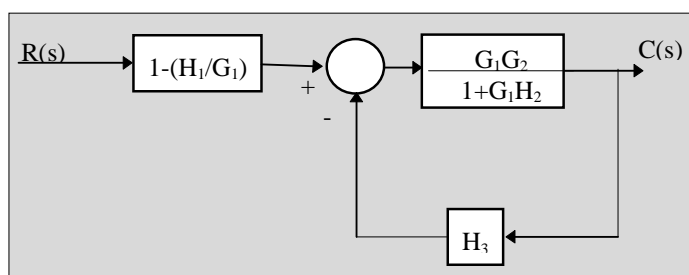


figura 3.38

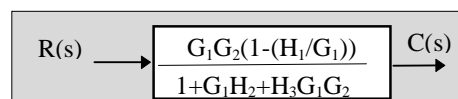


figura 3.39

Una segunda forma de obtener la función de transferencia sería utilizando MATLAB.

La figura 3.34 muestra un sistema realimentado con múltiples bucles. El objetivo es obtener la función de transferencia de lazo cerrado

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

Para este ejemplo los pasos a desarrollar son los siguientes:

Paso 1.- Introducir los diferentes bloques funcionales del sistema en MATLAB.

Paso 2.- Mover G_1 delante de G_2 .

Paso 3.- Simplificar el paralelo $H_1 G_1$ con la función **parallel**.

Paso 4.- Resolver el bucle realimentado de $G_1 H_2$ con la función **feedback**.

Paso 5.- Resolver las funciones en cascada con G_2 .

Paso 6.- Resolver el bucle realimentado de H_3 .

Paso 7.- Resolvemos las funciones en cascada con la función **series**.

Paso 8.- Cancelamos los polos y ceros comunes del denominador y numerador de la función de transferencia con la función **minreal**.

Paso 9.- Mostrar la función de transferencia de lazo cerrado final con la función **printsys**.

Todos estos pasos están ilustrados seguidamente y se corresponden con la reducción del diagrama de bloques mostrado en la figura 3.34

```
» ng1=[8];
» dg1=[1];
» ng2=[1,0];
» dg2=[1,1,10];
» nh1=[3,0];
» dh1=[1,1];
» nh2=[2];
» dh2=[1,2];
» nh3=[1];
» dh3=[1];
» n1=conv(nh1,dg1);
» d1=conv(dh1,ng1);
» [n2,d2]=parallel(-n1,d1,1,1);
```

Automática: problemas resueltos

```
» [n3,d3]=feedback(ng1,dg1,nh2,dh2);
» [n4,d4]=series(n3,d3,ng2,dg2);
» [n5,d5]=feedback(n4,d4,nh3,dh3);
» [n6,d6]=series(n2,d2,n5,d5);
» printsys(n6,d6)
num/den =
40 s^3 + 144 s^2 + 128 s
-----
8 s^4 + 224 s^3 + 568 s^2 + 1792 s + 1440
» [n7,d7]=minreal(n6,d6);
0 pole-zeros cancelled
» printsys(n7,d7)
num/den =
5 s^3 + 18 s^2 + 16 s
-----
s^4 + 28 s^3 + 71 s^2 + 224 s + 180
```

21.- Simplificar el diagrama de bloques que aparece en la *figura 3.40* y obtener la función de transferencia de lazo cerrado $C(s)/R(s)$.

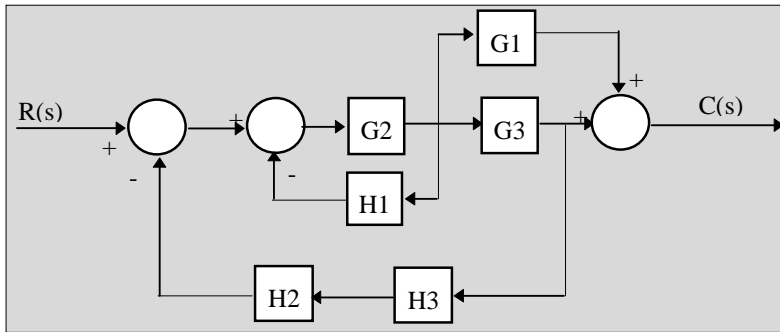


figura 3.40

Solución:

Para el diagrama de bloques de la *figura 3.40*, alteramos la bifurcación que hay tras el bloque G_3 y pasa a preceder a dicho bloque, llevando asociado un cambio en el bloque de realimentación que se convierte en $H_2H_3G_3$ como muestra la *figura 3.41*.

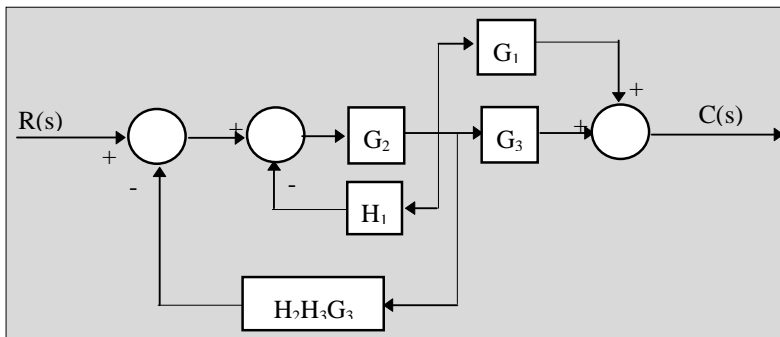


figura 3.41

Resolvemos el sumador de salida, así como el lazo con realimentación H_1 , y obtenemos como resultado el diagrama de bloques de la *figura 3.42*.

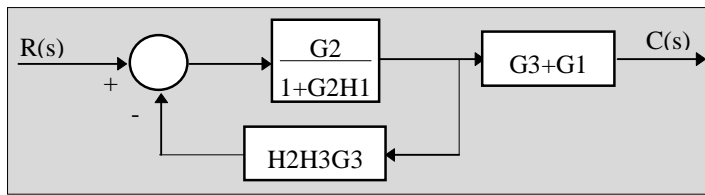


figura 3.42

Finalmente la figura 3.43 muestra el diagrama de bloques resultante de eliminar el lazo con realimentación $H_2H_3G_3$ que permite obtener la función de transferencia final.

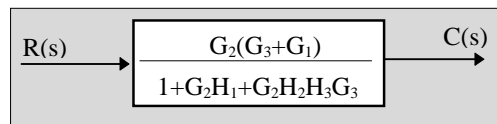


figura 3.43

Utilizando MATLAB lo realizamos de la siguiente forma.

La figura 3.40 muestra un sistema realimentado con múltiples bucles. El objetivo es obtener la función de transferencia de lazo cerrado

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

Para este ejemplo los pasos a desarrollar son los siguientes:

Paso 1.- Introducir los diferentes bloques funcionales del sistema en MATLAB.

Paso 2.- Resolver las funciones en cascado $H_2 H_3$ con la función **series**. (N_1)

Paso 3.- Mover G_3 detrás de la bifurcación. (N_2)

Paso 4.- Simplificar el paralelo G_1G_3 con la función **parallel**. (N_3)

Paso 5.- Resolver el bucle realimentado de $G_2 H_1$ con la función **feedback**. (N_4)

Paso 6.- Resolver el bucle realimentado de $N_4 N_2$. (N_5)

Paso 7.- Resolver las funciones en cascada N_5N_3 con la función **series**. (N_6)

Paso 8.- Cancelar los polos y ceros comunes del denominador y numerador de la función de transferencia con la función **minreal**.

Paso 9.- Mostrar la función de transferencia de lazo cerrado final con la función **printsys**.

Todos estos pasos están ilustrados seguidamente y se corresponden con la reducción del diagrama de bloques mostrado en la figura 3.40.

```

» ng1=[1,0];
» dg1=[1,2];
» ng2=[1];
» dg2=[1,2];
» ng3=[3,0];
» dg3=[1,4];
» nh1=[4];
» dh1=[1];
» nh2=[5];
» dh2=[1];
» nh3=[1];
» dh3=[1,0];
» [n1,d1]=series(nh2,dh2,nh3,dh3);
» n2=conv(n1,ng3);
» d2=conv(d1,dg3);
» [n3,d3]=parallel(ng1,dg1,ng3,dg3);
» [n4,d4]=feedback(ng2,dg2,nh1,dh1);
» [n5,d5]=feedback(n4,d4,n2,d2);
» [n6,d6]=series(n5,d5,n3,d3);
» printsys(n6,d6)
num/den =
4 s^4 + 26 s^3 + 40 s^2
-----
s^5 + 16 s^4 + 107 s^3 + 314 s^2 + 312 s
[n7,d7]=minreal(n6,d6);
» printsys(n7,d7)
num/den =
4 s^2 + 10 s
-----

```

Automática: problemas resueltos

$$s^3 + 12s^2 + 59s + 78$$

22.- Obtener el diagrama de bloques correspondiente al diagrama de flujo de señal de la *figura 3.44*.

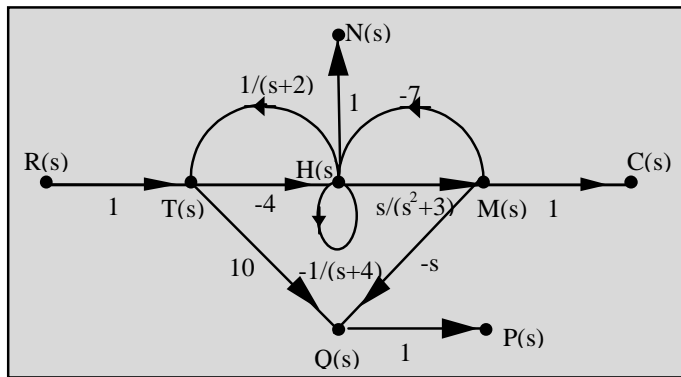


figura 3.44

Solución:

Para obtener el diagrama de bloques asociado a este diagrama de flujo de señal, utilizaremos las correspondencias entre tipos de diagramas mostradas en la *figura 3.45*.

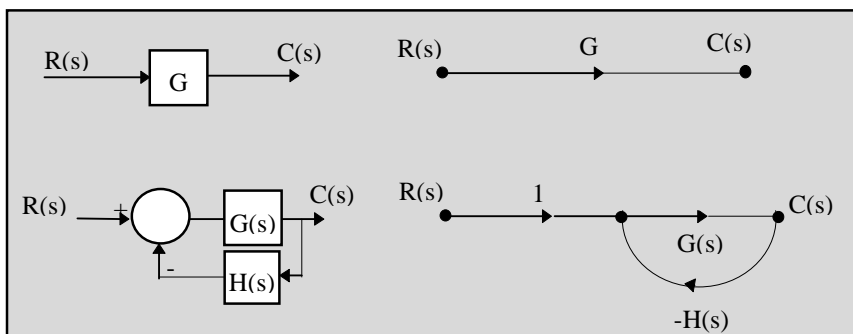


figura 3.45

Aplicando estas conversiones al diagrama de bloques de la figura 3.44 obtenemos el diagrama de flujo de señal de la figura 3.46.

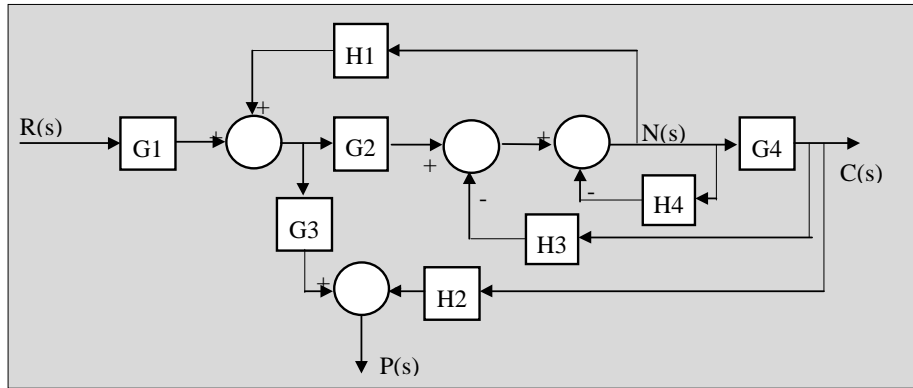


figura 3.46

Tema 4 :

***Descripción
interna***

23.- Considerar el sistema eléctrico de la figura 4.1. Eligiendo v_C e i_L como variables de estado, obtener el estado de equilibrio del sistema

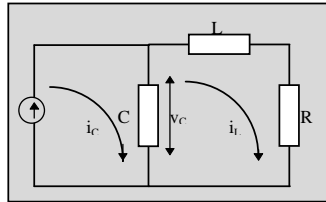


figura 4.1

Solución:

Las ecuaciones del sistema son:

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L + \frac{1}{C} \int (i_L - i_c) dt = 0$$
$$\frac{1}{C} \int (i_c - i_L) dt = v_C$$

Si elegimos como variables de estado

$$x_1 = v_C$$

$$x_2 = i_L$$

como salida del sistema:

$$y = i_L$$

y como entrada:

$$u = i_c$$

las ecuaciones las podemos escribir como:

$$\begin{aligned}
 L\dot{x}_2 + Rx_2 - x_1 &= 0 \\
 \frac{1}{C}(u - x_2) &= \dot{x}_1
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -\frac{1}{C}x_2 + \frac{u}{C} \\
 \dot{x}_2 &= \frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de estado en forma matricial quedan como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

24.- Sea el sistema descrito por $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = u$. Determinar una representación de este sistema en el espacio de estados.

Solución:

Si definimos las variables de estado como:

$$\begin{aligned}x_1 &= y \\x_2 &= \dot{y} \\x_3 &= \ddot{y}\end{aligned}$$

podemos obtener que:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u - 2x_2 - 3x_3\end{aligned}$$

y las ecuaciones de estado en forma matricial quedan como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

25.- Analizar el sistema descrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Solución:

Para analizar la estabilidad del sistema, calcularemos inicialmente la función de transferencia considerando como entrada la señal u y como salida la señal y . Para ello partimos de las ecuaciones de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - x_2 + u \end{cases}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad y = x_1$$

Si derivamos la expresión $y=x_1$ obtenemos que:

$$\dot{y} = \dot{x}_1.$$

Por otro lado, definimos:

$$\dot{y} = \dot{x}_2$$

y volvemos a derivar, obteniendo:

$$\ddot{y} = \dot{x}_2.$$

Con todo ello, las ecuaciones quedan como:

Automática: problemas resueltos

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -4y - \dot{y} + u \\ \ddot{y} &= 3\dot{y} - \ddot{y} + \dot{u} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} + 3\dot{y} + y = 2u$$

Si le aplicamos la transformada de Laplace y suponemos condiciones iniciales nulas, obtenemos que:

$$s^2 Y(s) + 3sY(s) + Y(s) = 2U(s)$$

de donde obtenemos que la función de transferencia toma la forma

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 1}$$

cuyos polos están ubicados en $s = -2.62$ y $s = -0.38$ lo que nos demuestra que el sistema es estable ya que ambos están a la izquierda del eje imaginario del plano s .

Tema 5 :

Modelado matemático de sistemas dinámicos

26.- En el sistema de la figura 5.1, $x(t)$ es el desplazamiento de entrada y $\phi(t)$ es el desplazamiento angular de salida. Supongamos que las masas en juego son insignificantes, que todos los movimientos tienen la restricción de ser pequeños y por lo tanto, el sistema lo podemos considerar lineal y las condiciones iniciales de x y ϕ son cero. Obtener:

- La función de transferencia $\Phi(s)/X(s)$.
- La respuesta $\phi(t)$ cuando $x(t)$ es una entrada escalón.

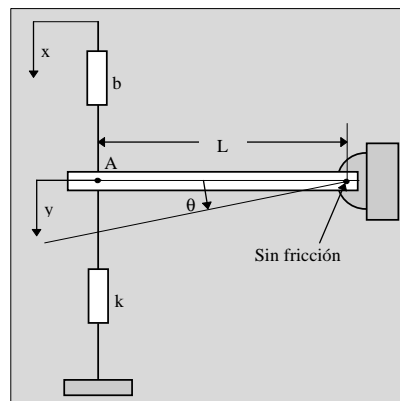


figura 5.1

Solución:

Para obtener la función de transferencia, debemos plantear inicialmente la ecuación de movimiento, que es el resultado de la aplicación de la segunda ley de Newton para rotación en el punto A de la barra de momento de inercia I, y se corresponde con la ecuación

$$I \ddot{\theta} = -b(\dot{y} - \dot{x})L - kyL$$

Si calculamos la transformada de Laplace, suponiendo condiciones iniciales nulas, ángulo de giro pequeño y que $y = \theta L$ obtenemos la expresión:

$$Is^2 \theta(s) = -b(Ls\theta(s) - sX(s))L - k(L\theta(s))L$$

Por lo que la función de transferencia podemos ponerla como muestra la siguiente expresión:

$$\frac{\theta(s)}{X(s)} = \frac{bLs}{Is^2 + bL^2s + kL^2}$$

Si la entrada es el escalón unitario, su transformada de Laplace es $X(s)=1/s$ por lo que la transformada de Laplace de la salida queda como:

$$\theta(s) = \frac{bLs}{(Is^2 + bL^2s + kL^2)s} = \frac{bLs}{Is^3 + bL^2s^2 + kL^2s} = \frac{\frac{bLs}{I}}{s^3 + \frac{bL^2s^2}{I} + \frac{kL^2}{I}s}$$

Si suponemos que $b=1; L=1; I=1; k=1$, lo que no quita generalidad al problema pero si facilita su resolución, podemos afirmar que los polos están ubicados en:

$$s_1 = -0.5 + (\sqrt{3}/2)j = \alpha + \beta$$

$$s_2 = -0.5 - (\sqrt{3}/2)j = \alpha - \beta$$

Para los polos s_1 y s_2 calcularemos la función $\Gamma(s)$ asociada de la forma:

$$\Gamma(s) = \frac{(s + s_1)(s + s_2)\theta(s)}{j\beta} = -\frac{2(s+1)}{\sqrt{3}s} j$$

que la evaluamos en s_1 y obtenemos:

$$\Gamma(-0.5 + (\sqrt{3}/2)j) = -\frac{2\sqrt{3}}{3} j = \Gamma_r + \Gamma_i j \Rightarrow \begin{matrix} \Gamma_r = 0 \\ \Gamma_i = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{matrix}$$

de donde la expresión de la respuesta temporal del sistema de la figura 5.1 ante una entrada escalón unitario, queda en la forma:

$$\theta(t) = e^{-(1/2)t} \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

y su representación gráfica la mostramos en la figura 5.2.

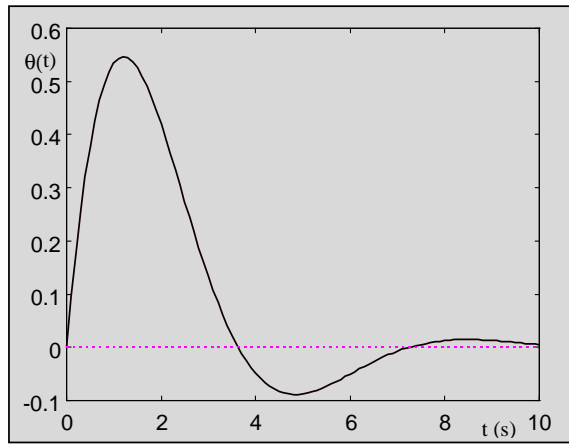


figura 5.2

27.- Para el sistema de la figura 5.3:

a) *Obtener la función de transferencia siendo x la entrada e y la salida.*

b) *Obtener $x(t)$ suponiendo que m_p , la masa de la rueda, es mucho menor que m .*

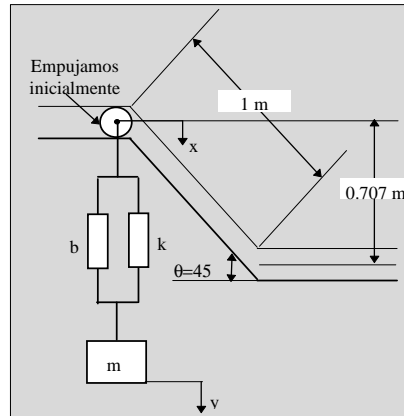


figura 5.3

Solución:

La ecuación de movimiento es el resultado de la aplicación de la segunda ley de Newton a la masa m y se corresponde con la ecuación:

$$m\ddot{y} = -b(\dot{y} - \dot{x}) - k(y - x)$$

Si le calculamos su transformada de Laplace, suponiendo condiciones iniciales nulas, obtenemos:

$$ms^2Y(s) + bs(Y(s) - X(s)) + k(Y(s) - X(s)) = 0$$

Por lo que la función de transferencia podemos ponerla como :

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

Para obtener $x(t)$ suponiendo m_p mucho menor que m , analizamos la figura 5.4.

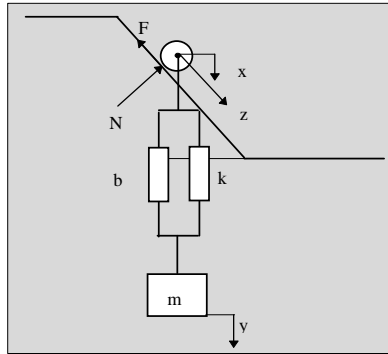


figura 5.4

La ecuación del movimiento de la masa m en la dirección z viene dada por:

$$m \ddot{z} = mg \operatorname{sen} 45^\circ - F$$

donde F es la fuerza de rozamiento.

Si aplicamos la segunda ley de Newton para rotación a la masa m_p obtenemos que:

$$J \ddot{\theta} = FR$$

donde R es el radio del cilindro y

$$J = \frac{m_p R^2}{2}$$

es su inercia.

Como sabemos que $z=R\theta$, la ecuación la podemos poner como:

$$F = \frac{m_p}{2} \ddot{z}$$

quedando la ecuación del movimiento como:

$$m \ddot{z} = mg \sin 45^\circ - \frac{m_p \ddot{z}}{2}$$

Como sabemos que la masa colgante es mucho mayor que la masa que rota, podemos afirmar que:

$$m \ddot{z} = mg \sin 45^\circ = 0.707mg \Rightarrow \ddot{z} = 6.92$$

Integrando la ecuación obtenemos que:

$$z = 3.46t^2$$

y en función de x nos queda que:

$$x(t) = 2.45t^2$$

28.- Considerar el sistema del péndulo con resortes de la figura 5.5. Suponer que la fuerza del resorte que actúa sobre el péndulo es cero cuando el péndulo está vertical ($\theta=0$), que la fricción implicada es insignificante y que el ángulo de oscilación θ es pequeño. Obtener un modelo matemático del sistema.

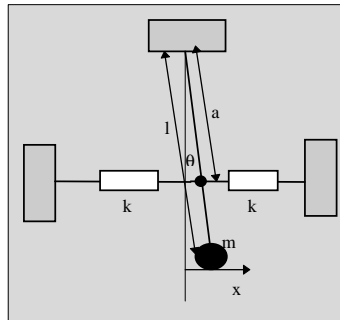


figura 5.5

Solución:

Si aplicamos la segunda ley de Newton para rotación a la masa m , tenemos que:

$$\sum T = J\alpha$$

donde T es cada uno de los momentos aplicados a la masa m debidos a las diferentes fuerzas que actúan sobre ella, J es el momento de inercia de la masa y α es su aceleración angular.

Por tanto, si tenemos en cuenta la componente del peso y las dos fuerzas de cada uno de los dos muelles, que son contrarias a la dirección del movimiento, la ecuación del movimiento nos queda como:

$$-mgl \sin \theta - kxa - kxa = J \ddot{\theta}$$

Si suponemos que el ángulo de giro es pequeño, la elongación x del muelle la podemos poner como $x=\theta a$ y la ecuación nos queda como:

$$-mgl \sin \theta - k\theta a^2 - k\theta a^2 = J \ddot{\theta}$$

Como el momento de inercia de la masa en este caso es $J=ml^2$ y para ángulos pequeños se cumple que $\sin \theta = \theta$, la ecuación la podemos expresar como:

$$ml^2 \ddot{\theta} + (mgl + 2ka^2)\theta = 0$$

que representa el modelo matemático del sistema cuando el ángulo de giro es pequeño.

29.- El aparato utilizado por los atletas para impulsarse hacia arriba está representado en la figura 5.6. Modelar su dinámica suponiendo que la fuerza F proporcionada por el atleta es impulsiva y está aplicada en el extremo de la barra, cuyo momento de inercia respecto al eje de giro es I .

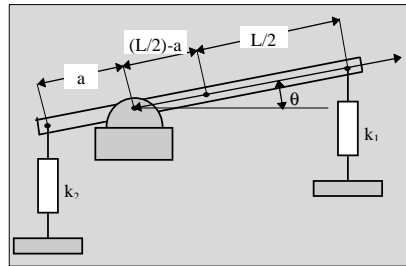


figura 5.6

Solución:

Para obtener la función de transferencia, comenzaremos obteniendo la ecuación de movimiento que en este caso es el resultado de la aplicación de la segunda ley de Newton a la inercia I y se corresponde con:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k_1\theta(L-a)^2 - k_2\theta a^2 + F(L-a)$$

Si le calculamos la transformada de Laplace, suponiendo condiciones iniciales nulas y que la fuerza F es impulsiva, obtenemos:

$$Is^2\theta(s) = -k_1(L-a)^2\theta(s) - k_2\theta(s)a^2 + (L-a)$$

de donde:

$$\theta(s) = \frac{(L-a)}{Is^2 + k_1(L-a)^2 + K_2a^2} = \frac{(L-a)/I}{s^2 + (k_1(L-a)^2 + K_2a^2)/I} = \frac{A}{s^2 + B}$$

siendo:

$$A = (L - a) / I$$

$$B = (k_1(L - a)^2 + k_2\theta(s)a^2) / I$$

Por último calculamos la transformada inversa de Laplace de

$$\theta(s) = \frac{A}{s^2 + B}$$

obteniéndose que la respuesta dinámica del sistema ante una entrada impulso toma la forma:

$$\theta(t) = \frac{A}{\sqrt{B}} \operatorname{sen} \sqrt{B}t = \frac{(L - a) / I}{\sqrt{(k_1(L - a)^2 + k_2\theta(s)a^2) / I}} \operatorname{sen} \sqrt{B}t$$

La figura 5.7 muestra $\theta(t)$ cuando $A=1$ y $B=1$.

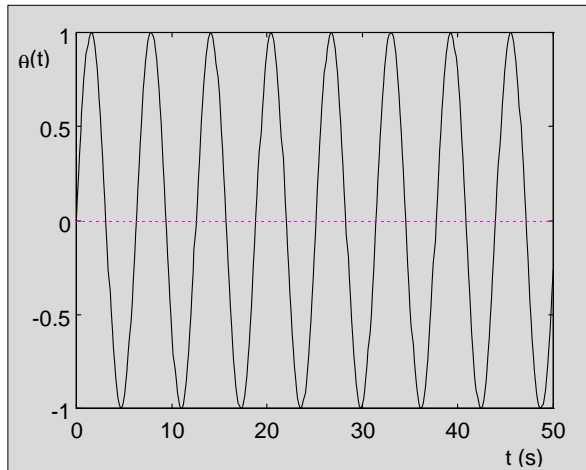


figura 5.7

30.- El sistema destinado a orientar un satélite pretende controlar su ángulo de dirección θ . Para ello, introducimos en el sistema de control la posición deseada θ_c , la cual la comparamos con la suma de la posición actual θ y de una señal angular proporcional al cambio de posición θ_v , obtenida por un sensor con constante k_r , a partir de la velocidad angular del satélite. El resultado de esta comparación es una señal de error θ_e que es recibida, tras un cierto tiempo de retraso T_d , por un actuador cuya función de transferencia es $G(s) = f_m / (T_c * s + 1)$, siendo f_m y T_c el par y la constante de tiempo del actuador, respectivamente. La fuerza f generada por el actuador y otra fuerza externa f_d debida al ruido, actúan sobre el satélite, cuya dinámica viene dada por $T(s) = 1 / Is$, siendo I el momento de inercia del satélite, obteniéndose un cambio en la posición del sistema, a partir de la cual podemos obtener, mediante un integrador, la posición actual θ . Obtener el diagrama de bloques del sistema.

Solución:

Para representar el sistema con un diagrama de bloques debemos obtener el diagrama correspondiente a cada una de las partes del mismo.

El hecho de que θ_c sea la entrada al sistema y la comparemos con la suma de la posición actual θ y una señal angular proporcional al cambio de posición θ_v lo podemos representar por el diagrama de bloques de la figura 5.8.

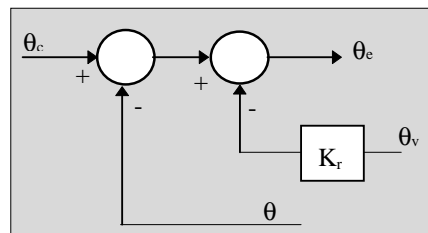


figura 5.8

El actuador que recibe la señal de error θ_e retrasada, podemos representarlo por el diagrama de bloques de la figura 5.9.

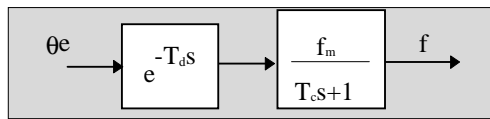


figura 5.9

La fuerza de salida del actuador, la fuerza externa debida al ruido y la dinámica del satélite la podemos representar por el diagrama de bloques de la figura 5.10.

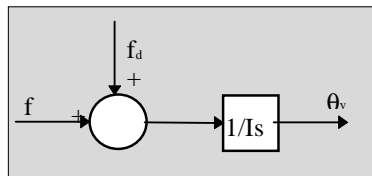


figura 5.10

Por último, el integrador lo podemos representar por el diagrama de bloques de la figura 5.11.

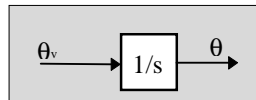


figura 5.11

Para obtener el diagrama de bloques del sistema global, integramos en un solo diagrama los mostrados en las cuatro últimas figuras, obteniéndose el de la figura 5.12.

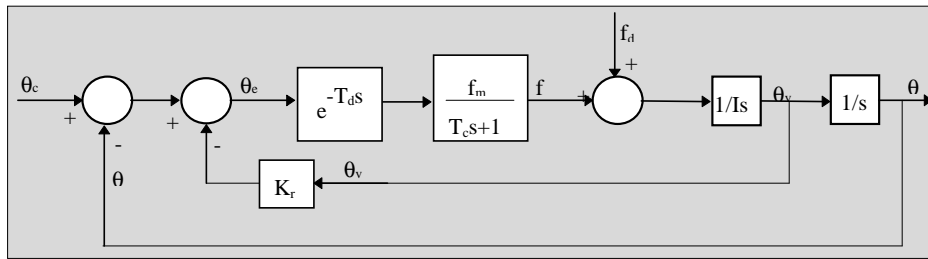


figura 5.12

31.- El circuito electromecánico de la figura 5.13(a) permite controlar la posición $y(t)$ de una masa a partir de una tensión de control $u(t)$. Sabemos que las características de cada uno de los componentes del mismo son: $R=10$ ohmios, $C=1$ milifaradio, $L=0.1$ henrios, $m=50\text{kg}$, $b=10\text{N}/(\text{m}/\text{seg})$, $k=10$ Newtons/m. Sabiendo que la fuerza $F(t)$ que produce una circulación de corriente por la reactancia L sobre la masa m , es proporcional a la intensidad de la misma. Obtener:

a) La función de transferencia $Y(s)/U(s)$.

b) El valor de la constante de proporcionalidad entre $F(t)$ y la intensidad de la corriente que circula por la bobina, sabiendo que cuando $u(t) = 1\text{v}$ entonces $y(t) = 0.1\text{m}$.

c) Si realimentamos la salida del sistema anterior haciendo uso del montaje de la figura 5.13(b) en el que $R1=R2=5$ ohmios, $V=5\text{v}$, siendo la resistencia por unidad de longitud de los potenciómetros de 10 ohmios por metro, y unitaria la ganancia del amplificador, calcular la función de transferencia en bucle abierto del sistema realimentado.

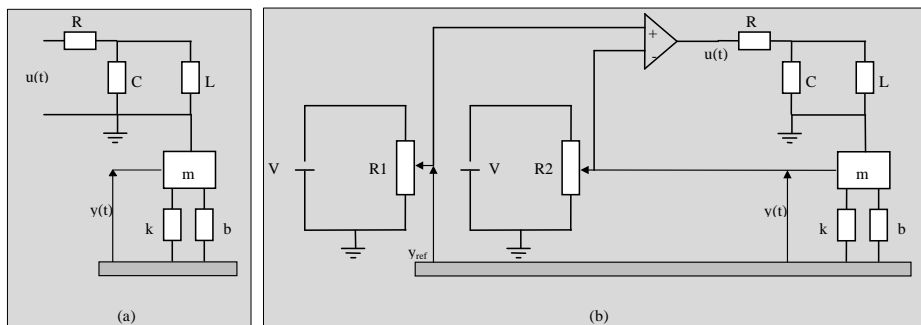


figura 5.13

Solución:

a) Para obtener la función de transferencia del sistema de figura 5.13(a), lo descomponemos en dos subsistemas, uno correspondiente a la parte eléctrica y otro a la mecánica.

Automática: problemas resueltos

Las ecuaciones que modelan la parte eléctrica las obtenemos aplicando las leyes de Kirchoff y las que lo hacen con la parte mecánica a partir de las leyes de Newton, obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 i(t) &= i_1(t) + i_2(t) \\
 u(t) &= Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i_2(t) dt \\
 \frac{1}{C} \int_0^t i_2(t) dt &= L \frac{di_1(t)}{dt} \\
 m \ddot{y}(t) &= -ky(t) - b \dot{y}(t) + Ki_1(t)
 \end{aligned}$$

Donde $i(t)$, $i_1(t)$ e $i_2(t)$, como muestra la figura 5.14 son las intensidades que circulan por la resistencia, el condensador y la bobina respectivamente, y K es la constante de proporcionalidad entre la intensidad que circula por la bobina L y la fuerza aplicada sobre la masa m .

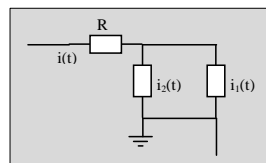


figura 5.14

Si aplicamos la transformada de Laplace a las cuatro ecuaciones y suponemos condiciones iniciales nulas, obtenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} I(s) = I_1(s) + I_2(s) \\ U(s) = RI(s) + \frac{1}{Cs} I_2(s) \\ \frac{1}{Cs} I_2(s) = LsI_1(s) \\ ms^2Y(s) = -kY(s) - bsY(s) + KI_1(s) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U(s) = (RLCs^2 + Ls + R)I_1(s) \\ KI_1(s) = (ms^2 + bs + k)Y(s) \end{array} \right\}$$

De donde obtenemos que la función de transferencia del sistema es:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{(RLCs^2 + Ls + R)(ms^2 + bs + k)} =$$

$$= \frac{K}{(10^{-3}s^2 + 10^{-1}s + 10)(50s^2 + 10s + 10)}$$

b) Para calcular el valor de la constante de proporcionalidad entre $F(t)$ y la intensidad de la corriente que circula por la bobina, obtenemos la ganancia estática del sistema por dos métodos distintos. Primero, como el cociente entre $y(t)$ y $u(t)$, es decir,

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{0.1}{1} = 0.1 \text{ v / m}$$

y segundo, como el límite de la función de transferencia cuando s tiende a cero:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{100} = 0.1$$

Con lo que podemos afirmar que la constante de proporcionalidad buscada vale $K=10\text{N/amperio}$ y la función de transferencia:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{(10^{-3}s^2 + 10^{-1}s + 10)(50s^2 + 10s + 10)} =$$

$$= \frac{1000}{(5s^4 + 501s^3 + 50101s^2 + 10100s + 10000)}$$

Para calcular la función de transferencia en bucle abierto del sistema realimentado, modelaremos el circuito de realimentación que es el mostrado en la figura 5.15.

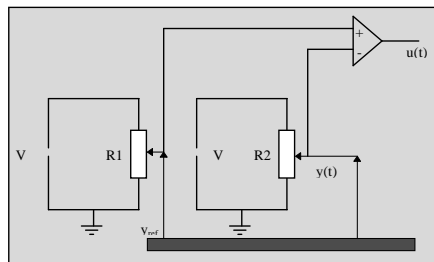


figura 5.15

Automática: problemas resueltos

y obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = v_+ - v_- \\ v_- = \frac{V}{R_2} R_A \\ v_+ = \frac{V}{R_1} R_B \\ R'' = R_1 = R_2 \\ R_A = K'' y(t) \\ R_B = K'' y_{ref} \end{array} \right\} \Rightarrow u(t) = \frac{V}{R''} K'' (y_{ref} - y(t)) \Rightarrow u(t) = 10(y_{ref} - y(t))$$

Donde K'' es la resistencia por unidad de longitud de los potenciómetros.

Si calculamos la transformada de Laplace suponiendo condiciones iniciales nulas, obtenemos que:

$$U(s) = 10(Y_{ref}(s) - Y(s))$$

que junto con la expresión de $G_1(s)$ nos permiten obtener el diagrama de bloques del sistema realimentado como muestra la figura 5.16:

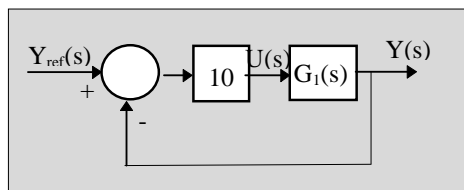


figura 5.16

y la función de transferencia en bucle abierto del sistema realimentado queda como:

$$G(s) = 10G_1(s) = \frac{10000}{(5s^4 + 501s^3 + 50101s^2 + 10100s + 10000)}$$

32.- Para el circuito de la figura 5.17 y suponiendo amplificadores operacionales ideales.

a) Hallar la función de transferencia.

b) Obtener la respuesta temporal ante una entrada escalón (todas las resistencias y todos los condensadores tienen valor unidad).

c) Calcular la relación de amortiguamiento y la frecuencia natural no amortiguada.

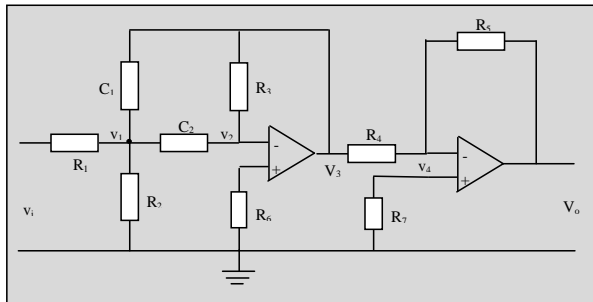


figura 5.17

Solución:

Teniendo en cuenta que la corriente que circula hacia los amplificadores es insignificante y que las tensiones en sus terminales de entrada coinciden, las ecuaciones que modelan el sistema son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_1 - v_2}{1/C_2 s} = \frac{v_2 - v_3}{R_3} \\ \frac{v_3 - v_4}{R_4} = \frac{v_4 - v_o}{R_5} \\ \frac{v_i - v_1}{R_1} = \frac{v_1 - v_2}{1/C_2 s} + \frac{v_1 - v_3}{1/C_1 s} + \frac{v_1}{R_2} \end{array} \right.$$

donde $v_2=v_4=v_+=v_+=0$ y $1/C_1s$ y $1/C_2s$ son las impedancias complejas correspondientes a los condensadores C_1 y C_2 respectivamente.

Simplificando, las ecuaciones las escribimos de la siguiente forma:

Automática: problemas resueltos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_1}{1/C_2 s} = \frac{-v_3}{R_3} \\ \frac{v_3}{R_4} = \frac{-v_o}{R_5} \\ \frac{v_i - v_1}{R_1} = \frac{v_1}{1/C_2 s} + \frac{v_1 - v_3}{1/C_1 s} + \frac{v_1}{R_2} \end{array} \right\}$$

y la función de transferencia bajo condiciones iniciales nulas es:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_2 R_3 R_5 C_2 s}{R_1 R_2 R_3 R_4 C_1 C_2 s^2 + (R_1 R_2 R_4 (C_1 + C_2))s + (R_1 + R_2)R_4}$$

Si $R_1=R_2=R_3=R_4=R_5=1\Omega$ y $C_1=C_2=1F$ la función de transferencia queda como

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s}{s^2 + 2s + 2}$$

Si comparamos el denominador de la función de transferencia obtenida, con el de la forma general de la función de transferencia de un sistema de segundo orden

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

la ganancia estática es $K=0$, la frecuencia natural amortiguada $\omega_n = \sqrt{2}\text{rad/s}$ y el factor de amortiguamiento $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Para calcular la respuesta temporal ante una entrada escalón, partimos de la función de transferencia anterior, donde $V_i(s)=1/s$ por lo que:

$$V_o(s) = \frac{1}{(s^2 + 2s + 2)}$$

cuyos polos están ubicados en:

$$s_1 = -1 + j = \alpha + \beta j$$

$$s_2 = -1 - j = \alpha - \beta j$$

Para los polos s_1 y s_2 calcularemos la función $\Gamma(s)$ asociada de la forma:

$$\Gamma(s) = \frac{(s + s_1)(s + s_2)V_o(s)}{j\beta} = \frac{1}{j} = -j$$

que la evaluó en s_2 y obtenemos:

$$\Gamma(-1 + j) = -j = \Gamma_r + \Gamma_i j \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_r = 0 \\ \Gamma_i = -1 \end{cases}$$

de donde la expresión de la respuesta temporal del sistema de la figura 5.17 ante una entrada escalón unitario viene dada por la expresión:

$$v(t) = e^{\alpha} [\Gamma_r \cos \beta t - \Gamma_i \sin \beta t]$$

y queda en la forma:

$$v(t) = e^{-t} \sin t$$

siendo su representación gráfica la mostrada en la figura 5.18.

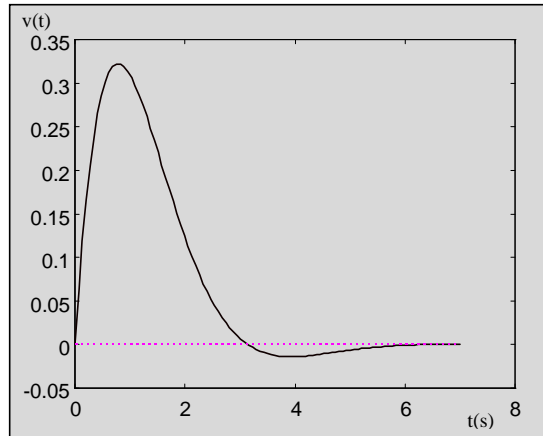


figura 5.18

33.- Obtener la función de transferencia y analizar la estabilidad del sistema mostrado en la figura 5.19. $(R_1C_1)^{-1} = 50\text{sg}^{-1}$ y $(R_2C_2)^{-1} = 4\text{sg}^{-1}$.

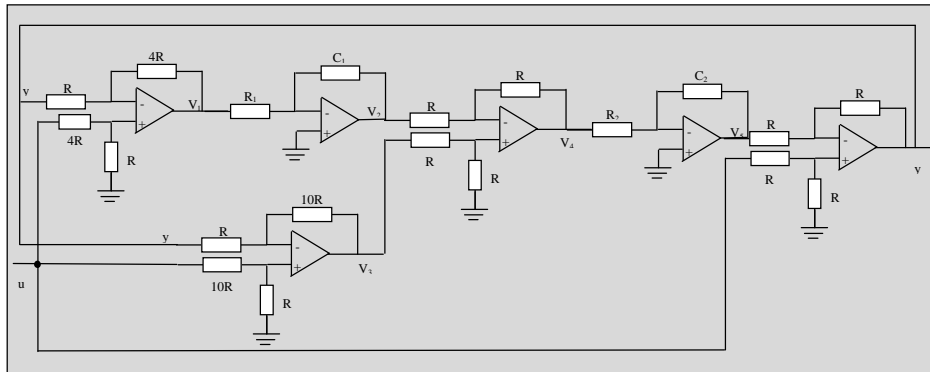


figura 5.19

Solución:

El sistema mostrado en la figura 5.19 lo podemos descomponer en los seis subsistemas de la figura 5.20 con sus correspondientes ecuaciones asociadas.

Como sabemos que $(R_1C_1)^{-1} = 50\text{sg}^{-1}$ y $(R_2C_2)^{-1} = 4\text{sg}^{-1}$ podemos obtener el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = u - 4y \\ V_2 = -\frac{50V_1}{s} \\ V_3 = u - 10y \\ V_4 = V_3 - V_2 \\ V_5 = -\frac{4V_4}{s} \\ y = u - V_5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_2 = -\frac{50(u - 4y)}{s} \\ V_4 = u - 10y - V_2 \\ u - y = -\frac{4V_4}{s} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = u + \frac{4}{s} \left[(u - 10y) + \frac{50}{s} (u - 4y) \right]$$

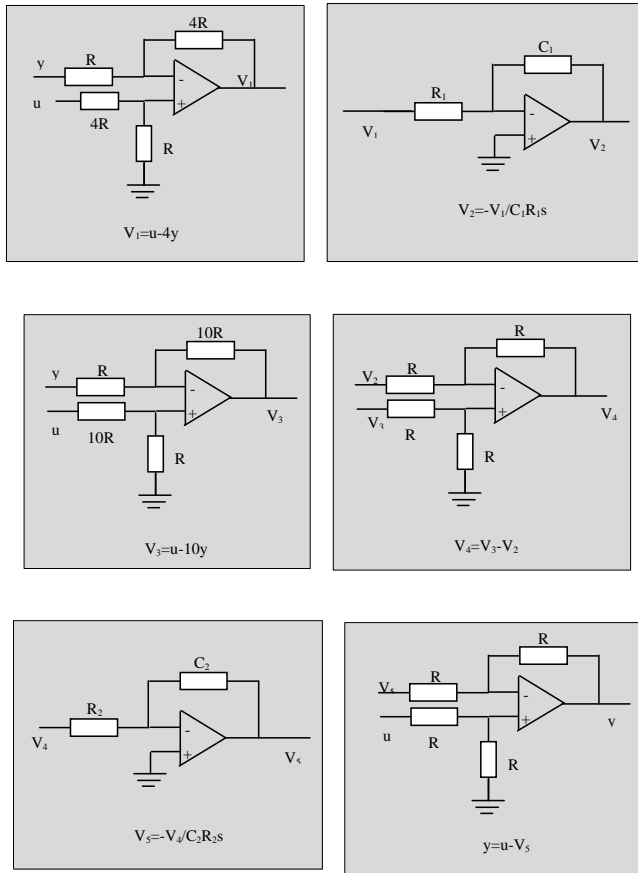


figura 5.20

de donde obtenemos que la función de transferencia del sistema de la figura 5.19 viene dada por:

$$\frac{y}{u} = \frac{s^2 + 4s + 200}{s^2 + 40s + 800}$$

Los polos de esta función de transferencia están ubicados en

$$s_{1,2} = -20 \pm 20j$$

Automática: problemas resueltos

Como ambos polos están a la izquierda del eje imaginario del plano s , podemos afirmar que el sistema es estable, aunque tendrá una respuesta subamortiguada ante una entrada escalón, ya que los polos son complejos y tienen parte imaginaria.

La representación gráfica de la tensión de salida $y(t)$, para una entrada escalón unidad, viene representada en la figura 5.21.

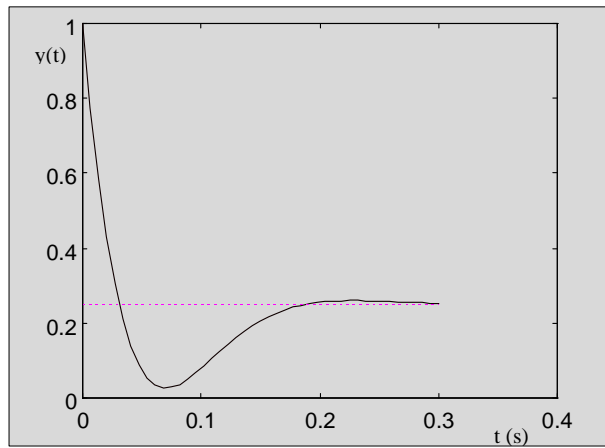


figura 5.21

34.- Determinar la función de transferencia del circuito de la figura 5.22. Calcular la relación de amortiguamiento y la frecuencia natural no amortiguada cuando $R=1\Omega$ y $C= 1F$. Calcular su respuesta temporal ante entrada escalón y representarla gráficamente.

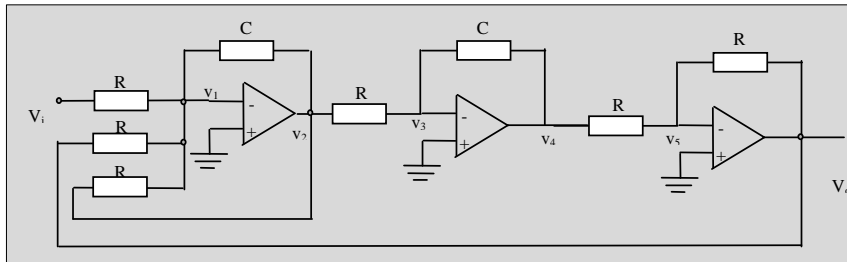


figura 5.22

Solución:

Teniendo en cuenta que la corriente que circula hacia los amplificadores es insignificante y que las tensiones en sus terminales de entrada coinciden, las ecuaciones que modelan el comportamiento del sistema son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_4 - v_5}{R} = \frac{v_5 - v_o}{R} \\ \frac{v_2 - v_3}{R} = \frac{v_3 - v_4}{1/Cs} \\ \frac{v_i - v_1}{R} = \frac{v_1 - v_2}{R_T} + \frac{v_1 - v_o}{R} \end{array} \right.$$

donde $v_5=v_3=v_1=0$ y

$$R_T = \frac{R}{1 + CRs}$$

quedando dichas ecuaciones reducidas a:

Automática: problemas resueltos

$$\left\{ \begin{array}{l} v_4 = -v_o \\ v_2 = -v_4 CRs \\ \frac{v_i}{R} = -\frac{v_2}{R_T} - \frac{v_o}{R} \end{array} \right\}$$

de donde podemos despejar la función de transferencia bajo condiciones iniciales nulas como:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{1}{C^2 R^2 s^2 + CRs + 1}$$

Si $R=1$ y $C=1$ la función de transferencia queda como:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{1}{s^2 + s + 1}$$

que si la comparo con la forma general de la función de transferencia de un sistema de segundo orden

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{K\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

la ganancia estática es $K=-1$, la frecuencia natural amortiguada $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$ y el factor de amortiguamiento $\xi=1/2$.

Para calcular la respuesta temporal ante una entrada escalón, partimos de la ecuación donde $V_i(s)=1/s$ por lo que

$$V_o(s) = -\frac{1}{(s^2 + s + 1)s}$$

cuyos polos están ubicados en:

$$\begin{aligned} s_1 &= 0 \\ s_2 &= -0.5 + (\sqrt{3}/2)j = \alpha + \beta j \\ s_3 &= -0.5 - (\sqrt{3}/2)j = \alpha - \beta j \end{aligned}$$

El residuo asociado al polo s_1 lo calculamos de la siguiente forma:

$$A = (s - s_1)V_o(s)\Big|_{s=s_1} = -1$$

Para los polos s_2 y s_3 calcularemos la función $\Gamma(s)$ asociada de la forma:

$$\Gamma(s) = \frac{(s + s_2)(s + s_3)V_o(s)}{j\beta} = \frac{2}{\sqrt{3}s} j$$

que la evaluamos en s_2 y obtenemos:

$$\Gamma(-0.5 + (\sqrt{3}/2)j) = 1 - (\sqrt{3}/3)j = \Gamma_r + \Gamma_i j \Rightarrow \begin{matrix} \Gamma_r = 1 \\ \Gamma_i = -\sqrt{3}/3 \end{matrix}$$

de donde la expresión de la respuesta temporal del sistema de la figura 5.22 ante una entrada escalón unitaria, queda en la forma:

$$v(t) = -1 + e^{-(1/2)t} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$$

y su representación gráfica es la mostrada en la figura 5.23.

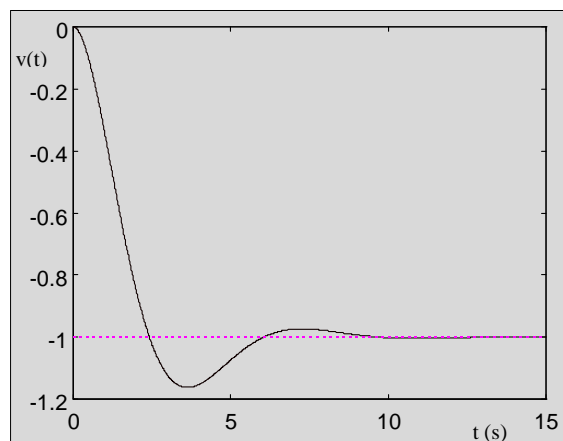


figura 5.23

35.- Hallar la función de transferencia V_c/V_a del circuito de la figura 5.24 y obtener la respuesta ante una entrada escalón suponiendo valores unidad para las resistencias y los condensadores.

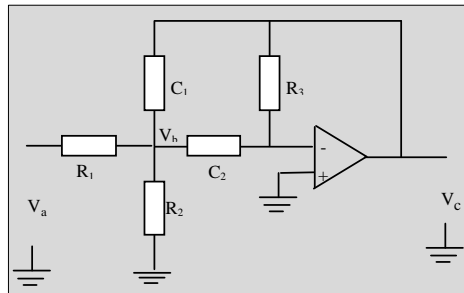


figura 5.24

Solución:

Teniendo en cuenta que la corriente que circula hacia el amplificador es insignificante y que la tensión en sus terminales de entrada coinciden, las ecuaciones que modelan el comportamiento del sistema son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{V_a - V_b}{R_1} = (V_b - V_c)C_1s + \frac{V_b}{R_2} + V_b C_2s \\ V_b C_2s = \frac{-V_c}{R_3} \end{array} \right\}$$

De donde la función de transferencia queda como:

$$G(s) = \frac{V_c}{V_a} = \frac{-R_2 R_3 C_2 s}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 s^2 + (R_1 R_2 C_2 + R_1 R_2 C_1)s + (R_1 + R_2)}$$

Si las resistencias y los condensadores tienen un valor unidad, esta función la podemos expresar como:

$$G(s) = \frac{V_c}{V_a} = \frac{-s}{s^2 + 2s + 2}$$

que coincide, excepto en el signo, con la función de transferencia del sistema de la figura 5.17 por lo que su respuesta ante una entrada escalón será similar, es decir

$$v_c(t) = -e^{-t} \text{sen } t$$

y su representación gráfica es la mostrada en la figura 5.25.

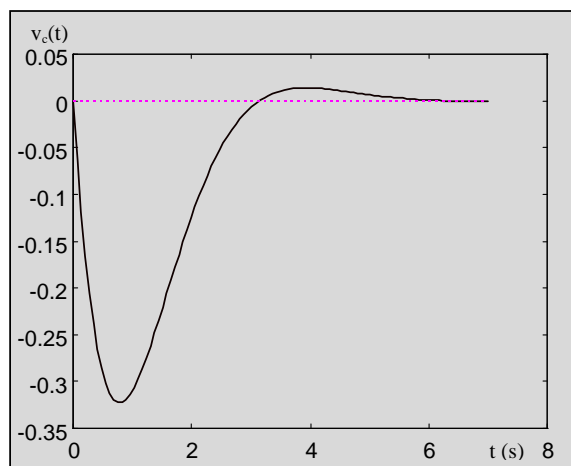


figura 5.25

36.- Determinar la función de transferencia del circuito de la figura 5.26. Calcular la relación de amortiguamiento y la frecuencia natural no amortiguada cuando : $R_1=R_2=Z_1=Z_2=1$ y $Z_3=Z_4=1/s$. Calcular su respuesta temporal ante entrada escalón y representarla gráficamente.

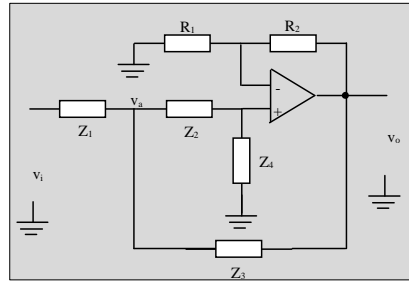


figura 5.26

Solución:

Teniendo en cuenta que la corriente que circula hacia el amplificador es insignificante y que la tensión en sus terminales de entrada coinciden, las ecuaciones que modelan el comportamiento del sistema son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{0 - v_-}{R_1} = \frac{v_- - v_o}{R_2} \\ \frac{v_a - v_+}{Z_2} = \frac{v_+ - 0}{Z_4} \\ \frac{v_i - v_a}{Z_1} = \frac{v_a - v_+}{Z_2} + \frac{v_a - v_o}{Z_3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_- = v_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o \\ v_+ = v_- = \frac{Z_4}{Z_2 + Z_4} v_a \\ \frac{v_i - v_a}{Z_1} = \frac{v_a - v_+}{Z_2} + \frac{v_a - v_o}{Z_3} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Z_4}{Z_2 + Z_4} v_a = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o \\ \frac{v_i}{Z_1} = v_a \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) - \frac{R_1 v_o}{(R_1 + R_2) Z_2} - \frac{v_o}{Z_3} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ v_i = \frac{R_1 Z_1 (Z_2 + Z_4)}{(R_1 + R_2) Z_4} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) v_o - \frac{Z_1}{Z_3} v_o - \frac{R_1 Z_1}{(R_1 + R_2) Z_2} v_o \right\}$$

Calculamos la transformada de Laplace de esta última ecuación y suponiendo condiciones iniciales nulas, la función de transferencia del sistema de la figura 5.26 la podemos poner como:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{(R_1 + R_2) Z_1 Z_2 Z_3 Z_4}{R_1 Z_1 (Z_2 + Z_4) (Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_2) - (R_1 + R_2) Z_4 Z_1^2 Z_2 - Z_1^2 Z_3 Z_4 R_1}$$

Si

$$Z_1 = Z_2 = R_1 = R_2 = 1 \text{ y } Z_3 = Z_4 = 1/s$$

la función de transferencia queda como:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{2}{s^2 + s + 1}$$

que si la comparo con la forma general de la función de transferencia de un sistema de segundo orden

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{K \omega_n}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$

la ganancia estática es $K=2$, la frecuencia natural amortiguada $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$ y el factor de amortiguamiento $\xi = 1/2$.

Para calcular la respuesta temporal ante una entrada escalón, partimos de la función de transferencia donde $V_i(s) = 1/s$, por lo que:

$$V_o(s) = \frac{2}{(s^2 + s + 1)s}$$

cuyos polos están ubicados en:

$$\begin{aligned} s_1 &= 0 \\ s_2 &= -0.5 + (\sqrt{3}/2)j = \alpha + \beta j \\ s_3 &= -0.5 - (\sqrt{3}/2)j = \alpha - \beta j \end{aligned}$$

El residuo asociado al polo s_1 lo calculamos de la siguiente forma:

Automática: problemas resueltos

$$A = (s - s_1)V_o(s)\Big|_{s=s_1} = 2$$

Para los polos s_2 y s_3 calcularemos la función $\Gamma(s)$ asociada de la forma:

$$\Gamma(s) = \frac{(s + s_2)(s + s_3)V_o(s)}{j\beta} = -\frac{4}{\sqrt{3}s}j$$

que la evaluamos en s_2 y obtenemos

$$\Gamma(-0.5 + (\sqrt{3}/2)j) = -2 + (2\sqrt{3}/3)j = \Gamma_r + \Gamma_i j \Rightarrow \begin{matrix} \Gamma_r = -2 \\ \Gamma_i = (2\sqrt{3})/3 \end{matrix}$$

de donde la expresión de la respuesta temporal del sistema de la figura 5.26 ante una entrada escalón unitaria, queda en la forma:

$$v_o(t) = 2 - e^{-(1/2)t} \left(2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$$

y su representación gráfica es la mostrada en la figura 5.27.

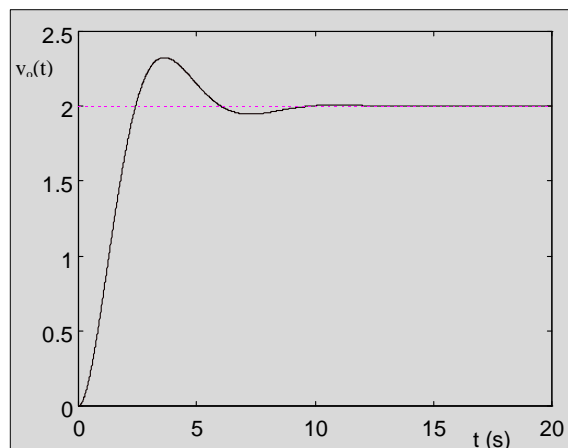


figura 5.27

37.- Obtener $v(t)$ para el circuito de la figura 5.28 donde la ganancia del amplificador es $A=100$.

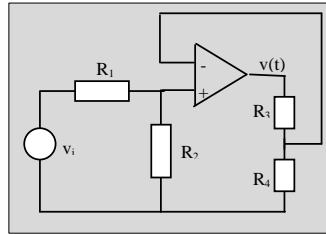


figura 5.28

Solución:

En este caso, no podemos suponer que las tensiones en los terminales del amplificador son iguales ya que su ganancia no es infinita, por lo que las ecuaciones que modelan el comportamiento del sistema son:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_i \\ v_- = \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_t \\ v_t = (v_+ - v_-)A \end{array} \right\} \Rightarrow v(t) = \frac{AR_2(R_3 + R_4)}{(R_1 + R_2)((A + 1)R_4 + R_3)} v_i(t)$$

38.- Para mantener constante la altura hidrostática $h_2(t)$ del depósito II de la figura 5.29, a pesar de la variación del caudal de salida $q_s(t)$, construimos un sistema de control. La altura de referencia viene dada por $u(t)$ y la de salida por $h_2(t)$. Ambas, actúan sobre dos potenciómetros, suministrando las tensiones v_+ y v_- respectivamente, que son proporcionales a dichas alturas con constante de proporcionalidad K_T . La diferencia entre estas tensiones, es una señal de error que alimenta un amplificador de tensión (G), cuya salida, $v(t)$, excita un servomotor que acciona una bomba y produce un caudal $q_e(t)$ proporcional a la velocidad $w(t)$ del servomotor y que llena el depósito I. La ecuación dinámica del servomotor es $T(t) = K_1 v(t) - K_2 w(t)$. Por último, conocemos que T es la suma de dos elementos, uno proporcional a la aceleración angular del servomotor y el otro proporcional a la velocidad angular del mismo con constantes de proporcionalidad K_3 y K_4 respectivamente.

- a) Hallar las ecuaciones del sistema.
- b) Dibujar el diagrama de bloques.
- c) Por simplificación del diagrama de bloques, obtener la función de transferencia.

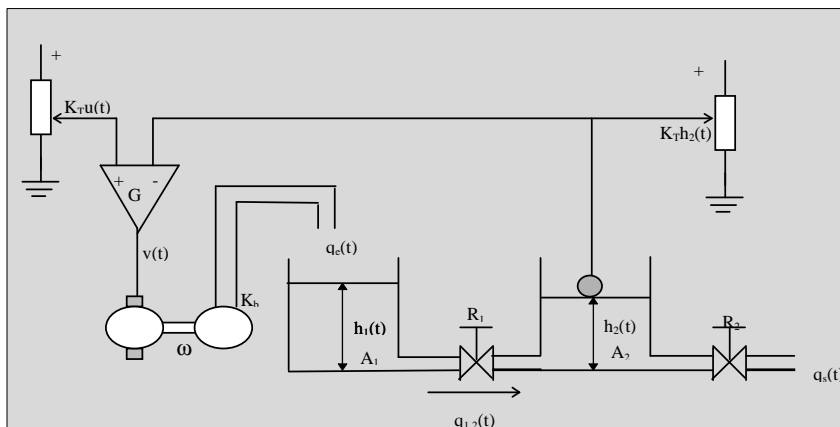


figura 5.29

Solución:

El modelo del sistema lo obtenemos de la siguiente forma:

- En el tanque número uno, el volumen de líquido acumulado es la diferencia entre el líquido que entra y el que sale, al igual que sucede en el tanque número dos como muestran las dos siguientes ecuaciones:

$$C_1 \frac{dh_1(t)}{dt} = q_e(t) - q_{1,2}(t)$$

$$C_2 \frac{dh_2(t)}{dt} = q_{1,2}(t) - q_s(t)$$

Según la definición de resistencia para la tubería que une los tanques uno y dos así como para la de salida del tanque dos, tenemos respectivamente las ecuaciones

$$q_{1,2}(t) = \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_1}$$

$$h_2(t) = R_2 q_s(t)$$

El caudal $q_e(t)$ que produce la bomba, es proporcional a la velocidad $w(t)$ del servomotor como muestra la ecuación:

$$q_e(t) = K_b \omega$$

Las tensiones que suministran los potenciómetros son proporcionales a las alturas de entrada y la diferencia entre ellas es una señal de error que podemos expresarla como:

$$e(t) = K_T (u(t) - h_2(t))$$

Esta señal de error alimenta un amplificador de ganancia G cuya tensión de salida nos muestra la ecuación:

$$v(t) = Ge(t)$$

Por último, conocemos que la dinámica del servomotor es la mostrada en las dos ecuaciones siguientes:

Automática: problemas resueltos

$$T = K_1V - K_2\omega$$

$$T = K_3\dot{\omega} + K_4\omega$$

Si calculamos la transformada de Laplace del conjunto de ecuaciones anteriores, obtenemos

$$C_1sH_1(s) = Q_e(s) - Q_{1,2}(s)$$

$$C_2sH_2(s) = Q_{1,2}(s) - Q_s(s)$$

$$Q_{1,2}(s) = \frac{H_1(s) - H_2(s)}{R_1}$$

$$H_2(s) = R_2Q_s(s)$$

$$Q_e(s) = K_b\omega(s)$$

$$E(s) = K_T(U(s) - H_2(s))$$

$$V(s) = GE(s)$$

$$T(s) = K_1V(s) - K_2\omega(s)$$

$$T(s) = K_3s\omega(s) + K_4\omega(s)$$

Para cada una de estas ecuaciones, los diagramas de bloques parciales asociados a ellas son respectivamente los mostrados desde la figura 5.30 hasta la figura 5.38.

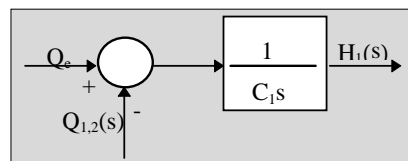


figura 5.30

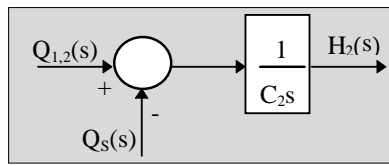


figura 5.31

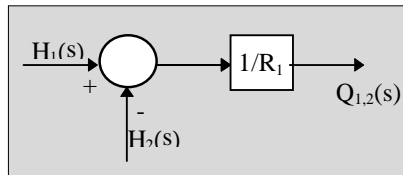


figura 5.32

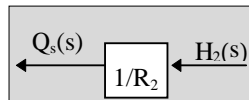


figura 5.33

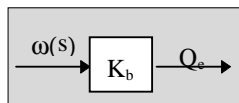


figura 5.34

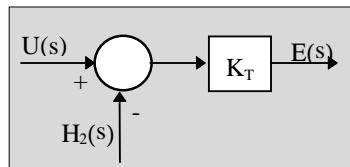


figura 5.35

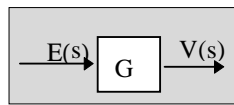


figura 5.36

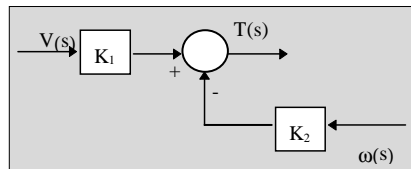


figura 5.37

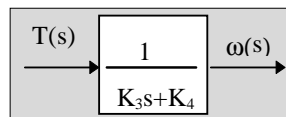


figura 5.38

Si integramos todos estos diagramas de bloques parciales, en uno global obtenemos el mostrado en la figura 5.39.

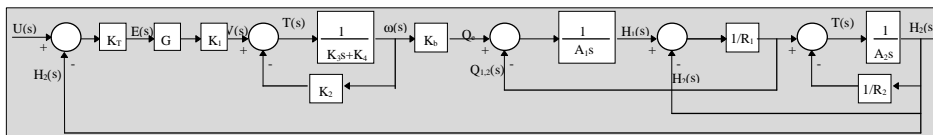


figura 5.39

Para obtener la función de transferencia del sistema a partir de la reducción del diagrama de bloques vamos a suponer que todas las constantes tienen valor unidad, lo que no resta generalidad al problema y sí simplifica los cálculos, con lo que el diagrama de bloques a reducir es el mostrado en la figura 5.40.

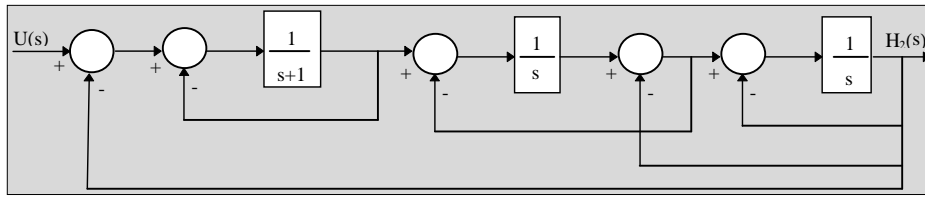


figura 5.40

Resolviendo los dos bucles realimentados del interior obtenemos el diagrama de bloques de la figura 5.41.

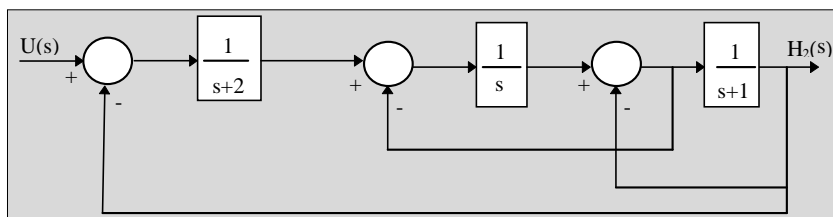


figura 5.41

Seguidamente, anteponeamos el último sumador al bloque cuya ganancia es $1/s$ cambiando el valor de la realimentación del primero, con lo que el diagrama de bloques resultante es el mostrado en la figura 5.42.

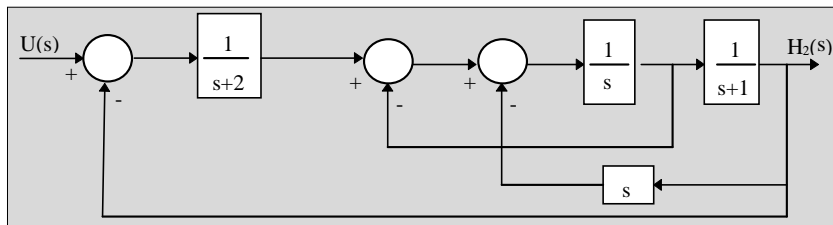


figura 5.42

Donde podemos intercambiar los dos sumadores de posición sin consecuencias adicionales y obtener el diagrama de la figura 5.43.

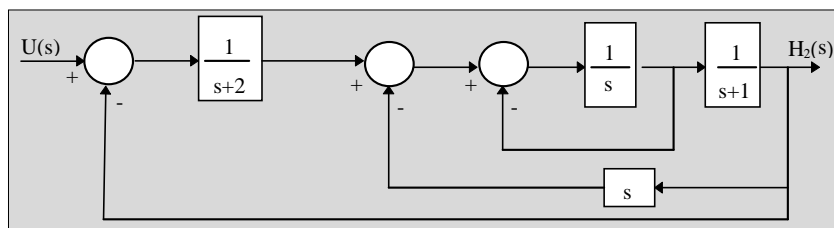


figura 5.43

Por último debemos de simplificar una sucesión de bucles realimentados como mostramos desde la figura 5.44 a la figura 5.47.

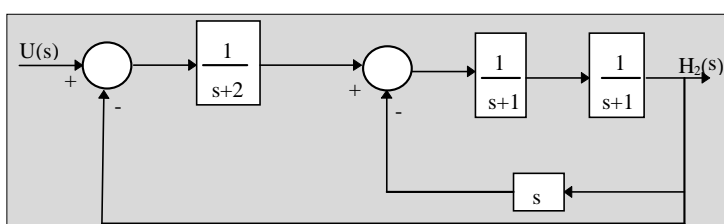


figura 5.44

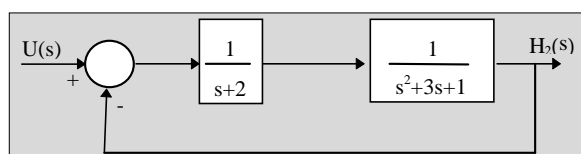


figura 5.45

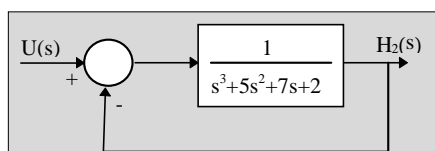


figura 5.46

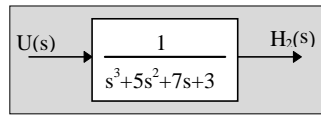


figura 5.47

Por tanto, la función de transferencia es:

$$\frac{H_2(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + 5s^2 + 7s + 3}$$

39.- El sistema de la figura 5.48 pretende mantener constante la altura de un depósito $h_2(t)$ contra las variaciones del gasto $q_2(t)$. Como sensor usamos un flotador que actúa sobre el cursor de un potenciómetro, suministrando una tensión $v_r(t)$ proporcional a la altura que deseamos controlar. La señal realimentada la comparamos con la señal de referencia $u(t)$. La diferencia entre éstas, previamente amplificada, actúa sobre un regulador que abre o cierra la válvula que regula el flujo de alimentación $q_1(t)$. Suponemos que el flujo $q_1(t)$ es proporcional a la señal de error y que los parámetros del sistema son:

$R_2=R_{1,2}$: Resistencia en $\text{seg}\cdot\text{m}^{-2}$.

C_1 y C_2 : Capacitancia en m^2 .

K_T : Constante de proporcionalidad de los potenciómetros en $\text{volt}\cdot\text{m}^{-1}$.

K_r : Constante del regulador en $\text{m}^3\cdot\text{seg}^{-1}\text{volt}^{-1}$.

Determinar:

a) El diagrama de bloques del sistema.

b) La función de transferencia $F(s)=H_2(s)/U(s)$.

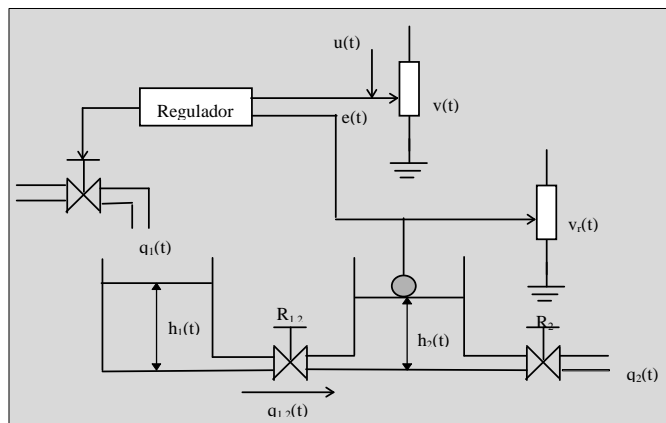


figura 5.48

Solución:

Las ecuaciones del sistema son

$$C_2 \frac{dh_2(t)}{dt} = q_{1,2}(t) - q_2(t)$$

$$h_2(t) = R_2 q_2(t)$$

$$C_1 \frac{dh_1(t)}{dt} = q_1(t) - q_{1,2}(t)$$

$$R_{1,2}(t) = \frac{h_1(t) - h_2(t)}{q_{1,2}(t)}$$

$$q_1(t) = K_r e(t)$$

$$e(t) = K_T (u(t) - h_2(t))$$

de donde obtenemos que:

$$C_2 \frac{dh_2(t)}{dt} = q_{1,2}(t) - \frac{h_2(t)}{R_2} = \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_{1,2}} - \frac{h_2(t)}{R_2}$$

$$C_1 \frac{dh_1(t)}{dt} = q_1(t) - \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_{1,2}}$$

$$q_1(t) = K_T K_r (u(t) - h_2(t))$$

Calculamos la transformada de Laplace a las tres últimas ecuaciones y obtenemos:

$$C_2 s H_2(s) = \frac{H_1(s) - H_2(s)}{R_{1,2}} - \frac{H_2(s)}{R_2}$$

$$C_1 s H_1(s) = Q_1(s) - \frac{H_1(s) - H_2(s)}{R_{1,2}}$$

$$Q_1(s) = K_T K_r (U(s) - H_2(s))$$

Automática: problemas resueltos

Los diagramas de bloques asociados a las tres ecuaciones anteriores son, respectivamente, los mostrados desde la figura 5.49, hasta la figura 5.51.

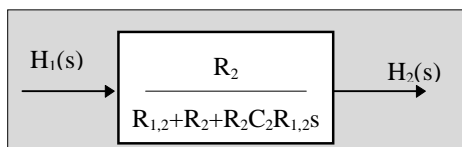


figura 5.49

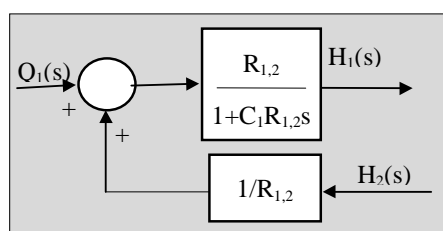


figura 5.50

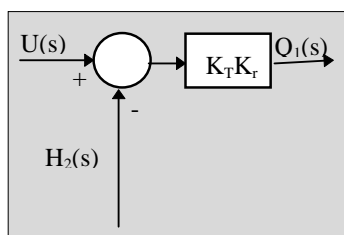


figura 5.51

Si integramos los tres diagramas anteriores en uno global, obtenemos el de la figura 5.52.

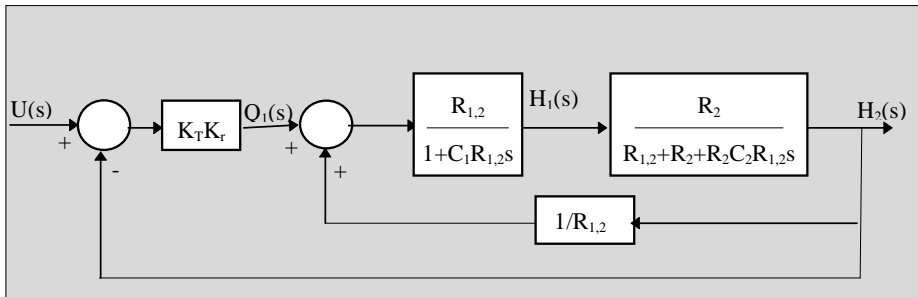


figura 5.52

Si multiplicamos las funciones de los bloques en serie y resolvemos los dos bucles realimentados, nos queda que la función de transferencia del sistema de partida es la mostrada en la expresión:

$$F(s) = \frac{H_2(s)}{U(s)} = \frac{K_T K_r R_2}{R_{12} C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_{12} C_1 + R_2 C_1 + R_2 C_2) s + K_T K_r R_2 + 1}$$

40.- Tenemos un tanque cónico lleno de agua, como muestra la figura 5.53. El flujo de líquido por la válvula es turbulento y está relacionado con el nivel de la presión hidrostática H , por $Q = 0.005\sqrt{H}$, donde Q es el gasto medido en m^3/s y H en m . Suponiendo que el nivel es de $2m$ en $t=0$. ¿Cuál será el nivel en $t=60seg$?

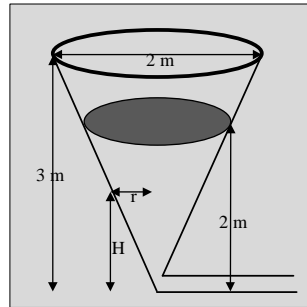


figura 5.53

Solución:

Puesto que el tanque no tiene entrada de agua la ecuación que modela su comportamiento es:

$$CdH = -Qdt$$

donde C es la capacitancia del tanque, Q el gasto de salida y H la presión hidrostática.

Puesto que:

$$Q = 0.005\sqrt{H}$$
$$C = \pi r^2$$

la ecuación la podemos expresar como:

$$\pi r^2 dH = -0.005\sqrt{H} dt$$

Como $H=3r$, tenemos que:

$$\pi\left(\frac{H}{3}\right)^2 dH = -0.005\sqrt{H} dt$$

e integrando desde la posición y el instante inicial hasta el final queda que

$$\int_2^x (H)^{3/2} dH = -0.014 \int_0^{60} dt$$

$$\frac{2}{5}(H)^{5/2} \Big|_2^x = -0.014t \Big|_0^{60}$$

de donde obtenemos que el nivel del depósito después de transcurrir 60 s es:

$$x = 1.65m$$

41.- Dibujar el sistema mecánico modelado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3\ddot{X}_1 + 3\dot{X}_1 + 6X_1 - 6X_2 &= F \\ -6X_1 + 5\ddot{X}_2 + 4\dot{X}_2 + 7X_2 - 4\dot{X}_3 &= 0 \\ -4\dot{X}_2 + 7\ddot{X}_3 + 4\dot{X}_3 &= 0 \end{aligned}$$

Obtener el sistema eléctrico correspondiente utilizando la analogía fuerza - tensión.

Solución:

El sistema consta de tres masas: $m_1=3\text{kg}$, $m_2=5\text{kg}$ y $m_3=7\text{kg}$, cuyas aceleraciones respectivas son:

$$\ddot{X}_1 \quad \ddot{X}_2 \quad \ddot{X}_3$$

Según las ecuaciones 1 y 3, tenemos dos amortiguadores cuyas constantes de fricción viscosa son, respectivamente, $b_1=3$ y $b_2=4$. El primero une la pared con m_1 y el segundo la masa m_2 y m_3 . También deducimos que hay un muelle de constante $k_1=6$ que une las masas m_1 y m_2 . Teniendo en cuenta lo ya obtenido podemos afirmar que un muelle de constante $k_2=1$ une la pared con la masa m_2 . Finalmente, existe una fuerza F en la dirección del movimiento, aplicada a la masa m_1 .

Por todo ello, podemos dibujar para el sistema de ecuaciones de partida el sistema mecánico de la figura 5.54.

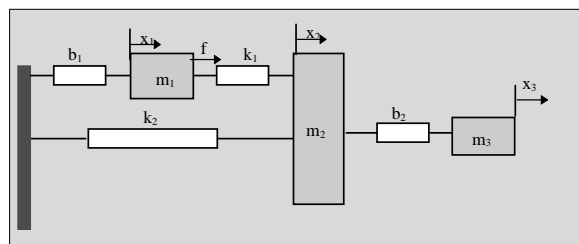


figura 5.54

Para obtener el sistema eléctrico análogo al anterior, realizamos la siguiente correspondencia:

$$\begin{aligned}
 m_1 &\rightarrow L_1 & m_2 &\rightarrow L_2 & m_3 &\rightarrow L_3 \\
 x_1 &\rightarrow q_1 & x_2 &\rightarrow q_2 & x_3 &\rightarrow q_3 \\
 b_1 &\rightarrow R_1 & b_2 &\rightarrow R_2 & & \\
 k_1 &\rightarrow 1/C_1 & k_2 &\rightarrow 1/C_2 & & \\
 e &\rightarrow f & & & & \\
 i_1 &\rightarrow \frac{dq_1}{dt} & i_2 &\rightarrow \frac{dq_2}{dt} & i_3 &\rightarrow \frac{dq_3}{dt}
 \end{aligned}$$

quedando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 L_1 \frac{di_1}{dt} &= -R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int i_2 dt - \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + e \\
 L_2 \frac{di_2}{dt} &= R_2 i_3 - R_2 i_2 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt - \frac{1}{C_1} \int i_2 dt - \frac{1}{C_2} \int i_2 dt \\
 L_3 \frac{di_3}{dt} &= R_2 i_2 - R_2 i_3
 \end{aligned}$$

que se corresponde con el circuito eléctrico que mostramos en la figura 5.55.

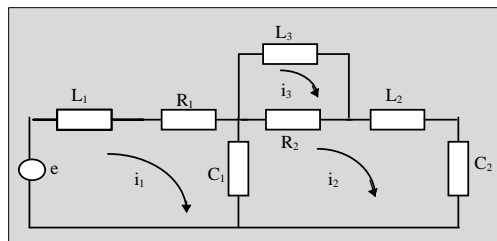


figura 5.55

42.- Para accionar una carga mecánica de $F=0.475\text{N.m}/(\text{rad}/\text{seg})$ y $J=9.5\text{Kg.m}^2$ empleamos un motor (figura 5.56) con las siguientes características:

| | |
|---|--|
| Constante de Fuerza contraelectromotriz | $K_m=0.95\text{V}/(\text{rad}/\text{seg})$ |
| Constante de par | $K_t=0.95\text{N.m}/\text{A}$ |
| Resistencia de armadura | $R_m=0.1\Omega$ |
| Inductancia de armadura | $L_m=0\text{H}$ |

El motor recibe la energía de un amplificador de potencia de ganancia $G_a=10\text{V}/\text{V}$. La realimentación la realizamos a través de un tacómetro que genera 90V cuando es accionado a $3000/\pi$ r.p.m. El amplificador de potencia es controlado mediante la salida de un amplificador operacional trabajando en modo diferencial de ganancia 10. Hallar las ecuaciones dinámicas que gobiernan el funcionamiento del sistema, dibujar el diagrama de bloques con $U(s)$ como entrada y $W(s)$ como salida y obtener la función de transferencia.

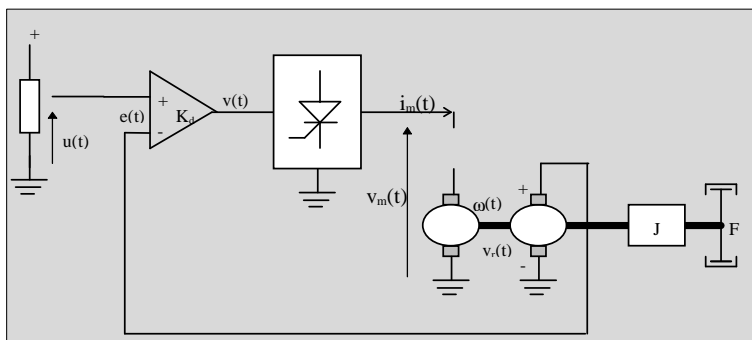


figura 5.56

Solución:

Las ecuaciones que modelan la parte electrónica del sistema las obtenemos de la siguiente forma:

La tensión de salida del tacómetro viene dada por:

$$V_r(t) = K_T \omega(t)$$

donde K_T es la constante de proporcionalidad entre dicha tensión y la velocidad angular de entrada. Su valor lo calculamos como:

$$K_T = \frac{90}{\frac{6000\pi}{60\pi}} = 0.9 \text{ v.s / rad}$$

La salida del amplificador operacional en modo diferencial se corresponde con la expresión:

$$v(t) = K_a(u(t) - v_r(t))$$

donde $K_a = 10$ es la ganancia del amplificador.

La tensión de entrada al motor la proporciona un amplificador de potencia cuya salida es:

$$v_m(t) = G_a v(t)$$

con $G_a = 10 \text{ V/V}$ la ganancia del amplificador.

Las ecuaciones que modelan el motor son:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_m(t) = R_m i_m(t) + v_g(t) \\ v_g(t) = K_m \omega(t) \\ T_m = K_t i_m(t) \\ T_m = J \dot{\omega} + F \omega \end{array} \right\} \Rightarrow v_m(t) = R_m \frac{J \dot{\omega} + F \omega}{K_t} + K_m \omega(t)$$

Si calculamos la transformada de Laplace del conjunto de ecuaciones anteriores, obtenemos :

$$V_r(s) = K_T \omega(s)$$

$$V(s) = K_a(U(s) - V_r(s))$$

$$V_m(s) = G_a V(s)$$

$$V_m(s) = R_m \frac{Js\omega(s) + F\omega(s)}{K_t} + K_m \omega(s)$$

Automática: problemas resueltos

Para cada una de las ecuaciones, los diagramas de bloques parciales asociados a ellas son los mostrados desde la figura 5.57 hasta la figura 5.60 respectivamente.

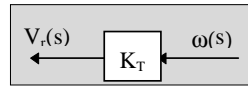


figura 5.57

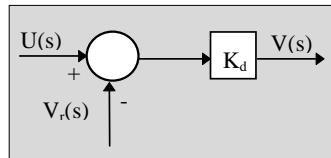


figura 5.58



figura 5.59

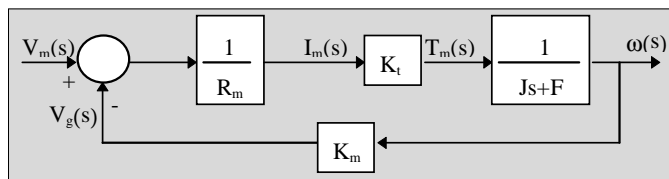


figura 5.60

Si integramos todos estos diagramas de bloques parciales, en un diagrama global obtenemos el mostrado en la figura 5.61.

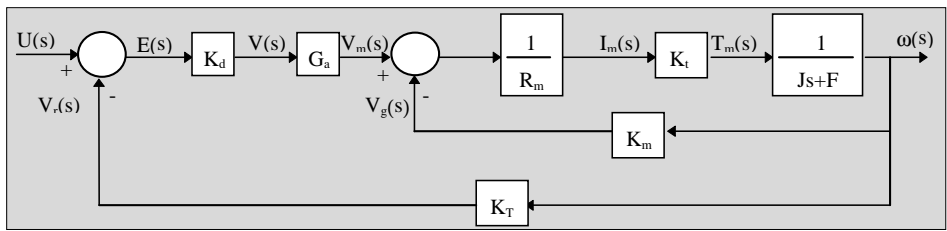


figura 5.61

Para obtener la función de transferencia del sistema, a partir de la reducción del diagrama de bloques, vamos a sustituir cada constante por su valor, con lo que el diagrama de bloques a reducir es el mostrado en la figura 5.62.

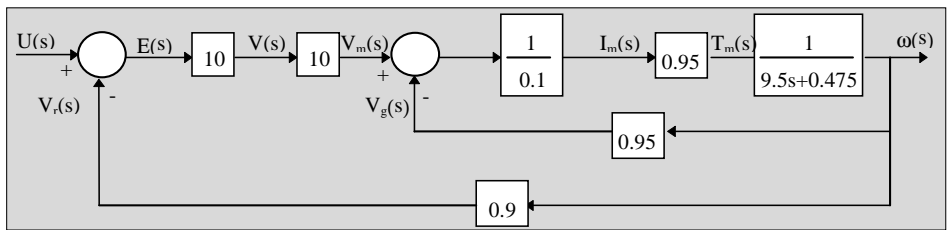


figura 5.62

Resolviendo los bloques en serie y el bucle realimentado del interior obtenemos el diagrama de bloques de la figura 5.63.

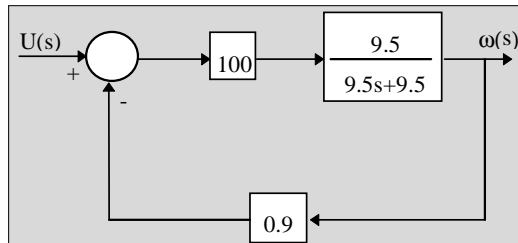


figura 5.63

Por último simplificamos el bucle realimentado como muestra la figura 5.64.

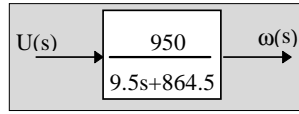


figura 5.64

Por tanto, la función de transferencia es:

$$\frac{\omega(s)}{U(s)} = \frac{950}{9.5s + 864.5}$$

43.- Obtener el modelo matemático del sistema mostrado en la figura 5.65.

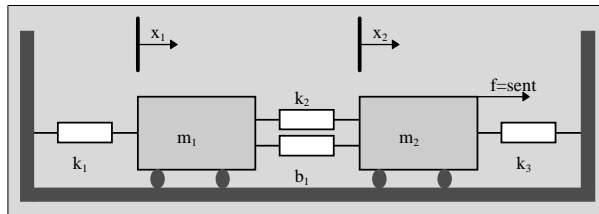


figura 5.65

Solución:

Tenemos un sistema mecánico de traslación, por lo que debemos aplicar la segunda ley de Newton a cada una de las masas, teniendo en cuenta tanto las fuerzas producidas por los resortes y el amortiguador (que se oponen al movimiento), como la producida externamente.

Así, para la masa m_1 debemos cumplir la siguiente ecuación diferencial:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) - b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

Y para la masa m_2 se satisface que:

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1) - b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + f$$

Si reagrupamos los sumandos de sendas ecuaciones, obtenemos el siguiente modelo matemático del sistema mecánico:

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) + b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_3 x_2 + k_2(x_2 - x_1) + b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = f$$

Si suponemos que:

$$m_1 = m_2 = 1$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1$$

Automática: problemas resueltos

$$b_1 = 1$$

$$f = \text{sent}$$

las ecuaciones quedan como:

$$\ddot{x}_1 + 2x_1 - x_2 + \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + 2x_2 - x_1 + \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = \text{sen } t$$

Si obtenemos la transformada de Laplace de cada una de las ecuaciones anteriores y suponemos que las condiciones iniciales son nulas, obtenemos que:

$$X_1(s) = \frac{s+1}{s^6 + 2s^5 + 5s^4 + 4s^3 + 7s^2 + 2s + 3}$$

$$X_2(s) = \frac{s^2 + s + 2}{s^6 + 2s^5 + 5s^4 + 4s^3 + 7s^2 + 2s + 3}$$

son las transformadas de Laplace de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para una entrada $f = \text{sent}$.

44.- Hallar la ecuación linealizada de

$$y = 0.2x^3$$

alrededor del punto $\bar{x} = 2$.

Solución:

Expandimos la ecuación $y = f(x) = 0.2x^3$ en una serie de Taylor alrededor del punto de trabajo $\bar{x} = 2$ obteniéndose que:

$$y = f(x) = f(\bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x}) + \dots$$

Si suponemos que los términos de orden superior en $(x - \bar{x})$ son pequeños, podemos despreciarlos y el desarrollo queda reducido a:

$$y - f(\bar{x}) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x})$$

donde:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=2} = 0.6x^2 = 2.4$$

Como

$$f(\bar{x}) = f(2) = 1.6$$

queda que:

$$y - 1.6 = 2.4(x - 2)$$

o bien

$$y = 2.4x - 3.2$$

que es la ecuación linealizada de $y = 0.2x^3$, válida en las proximidades del punto de operación $\bar{x} = 2$.

45.- Linealizar la ecuación:

$$z = x^2 + 4xy + 6y^2$$

en la región definida por:

$$8 \leq x \leq 10$$

$$2 \leq y \leq 4$$

Solución:

Si desarrollamos $z = f(x,y)$ como una serie de Taylor, alrededor del punto de equilibrio $(\bar{x}, \bar{y}) = (9,3)$, obtenemos que:

$$z = f(x,y) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=9, y=3} (x-\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=9, y=3} (y-\bar{y}) \right] + \\ + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} (x-\bar{x})^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} (x-\bar{x})(y-\bar{y}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} (y-\bar{y})^2 \right] + \dots$$

Como el término de segundo orden y los de órdenes superiores a éste son pequeños en torno al punto de trabajo, los podemos despreciar y la ecuación queda como:

$$z - \bar{z} = K_1(x-\bar{x}) + K_2(y-\bar{y})$$

donde:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=9, y=3} = (2x + 4y) \Big|_{x=9, y=3} = 30$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=9, y=3} = (4x + 12y) \Big|_{x=9, y=3} = 72$$

$$\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}^2 + 4\bar{x}\bar{y} + 6\bar{y}^2) = 243$$

Así, la aproximación lineal de la ecuación no lineal dada cerca del punto de operación $(x,y)=(9,3)$, lo podemos poner como

$$z - 243 = 30(x - 9) + 72(y - 3)$$

o bien como:

$$z = 30x + 72y - 243$$

ecuación que es lineal en x e y .

46.- Considere el sistema de la figura 5.66. Un servomotor de corriente continua controlado por armadura excita una carga consistente en un momento de inercia J_L . El par desarrollado por el motor es T_m . El desplazamiento angular del rotor del motor y el elemento de carga son ϕ_m y ϕ_L , respectivamente. La relación de engranajes es $n = \phi_L / \phi_m$. Hallar la función de transferencia $\Theta_L(s) / E_i(s)$.

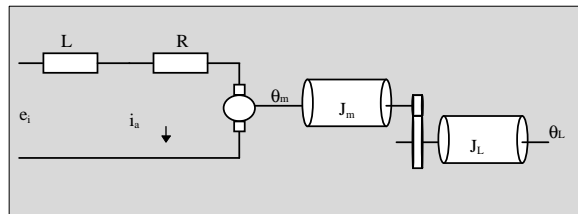


figura 5.66

Solución:

La ecuación diferencial del circuito de armadura es:

$$e_i = L \frac{di_a}{dt} + Ri_a + K_b \frac{d\theta_m}{dt}$$

y su transformada de Laplace bajo condiciones iniciales nulas:

$$E_i(s) = (Ls + R)I_a(s) + K_b s \theta_m(s)$$

donde:

$$e_b = K_b \frac{d\theta_m}{dt}$$

es la tensión inducida en la armadura.

Por otro lado, el par que crea el motor es proporcional a la corriente de armadura, es decir,

$$T_m = k i_a$$

Si aplicamos la segunda ley de Newton para rotación a la inercia J_m obtenemos:

$$J_m \ddot{\theta}_m = T_m - T$$

donde T es el par que se opone al movimiento debido al resto del sistema.

Teniendo en cuenta que las fuerzas de acción y reacción en el punto de unión de los dos engranajes deben ser iguales, y que la relación entre el número de dientes de las dos ruedas es

$$n = \frac{\theta_L}{\theta_m}$$

podemos escribir que:

$$T = nT_L$$

Para la segunda inercia, también se cumple la segunda ley de Newton, por lo que tenemos que:

$$J_L \ddot{\theta}_L = T_L$$

De las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\frac{J_m \ddot{\theta}_L}{n} + nJ_L \ddot{\theta}_L = Ki_a$$

cuya transformada de Laplace bajo condiciones iniciales nulas queda como:

$$\frac{J_m s^2 \theta_L(s)}{n} + nJ_L s^2 \theta_L(s) = KI_a(s) \quad \Rightarrow \quad \theta_L(s) \frac{s^2 J_m + n^2 s^2 J_L}{nK} = I_a(s)$$

y la función de transferencia del sistema de la figura 5.66 es:

$$\frac{\theta_L(s)}{E_i(s)} = \frac{nK}{[(Ls + R)(J_m + n^2 J_L)s + KK_b]s}$$

Tema 6 :

Acciones básicas de control

47.- Considerar los controladores automáticos industriales cuyas acciones de control proporcional (P), integral (I), proporcional-integral (PI), proporcional-derivativa (PD) y proporcional-integral-derivativa (PID) están dadas respectivamente por las siguientes funciones de transferencia:

$$G_P(s) = \frac{U_P(s)}{E(s)} = K_P$$

$$G_I(s) = \frac{U_I(s)}{E(s)} = \frac{K_I}{s}$$

$$G_{PI}(s) = \frac{U_{PI}(s)}{E(s)} = K_P \left(1 + \frac{1}{K_I s}\right)$$

$$G_{PD}(s) = \frac{U_{PD}(s)}{E(s)} = K_P (1 + T_D s)$$

$$G_{PID}(s) = \frac{U_{PID}(s)}{E(s)} = K_P \left(1 + \frac{1}{K_I s} + T_D s\right)$$

donde $E(s)$ es la transformada de Laplace de la señal de error.

Obtener la señal de salida para cada uno de los cinco tipos de controladores cuando la señal de error es la función escalón unitario o la función rampa unitaria.

Al trazar las curvas suponer que los valores numéricos de K_P , K_I , T_I y T_D son los siguientes:

$K_P=4$ (ganancia proporcional).

$K_I=2$ (ganancia integral).

$T_I=2s$ (tiempo integral).

$T_D=0.8s$ (tiempo derivativo).

Solución:

a) Para el control proporcional y un error de tipo escalón unitario tendremos que:

$$u(t) = K_P e(t) = 4$$

Si el error es de tipo rampa unitaria la salida será:

$$u(t) = K_P e(t) = 4t$$

Automática: problemas resueltos

b) Para el control integral y un error de tipo escalón unitario tendremos que:

$$u(t) = K_I \int_0^t e(t) dt = 2 \int_0^t e(t) dt = 2t$$

Si el error es de tipo rampa unitaria la salida será:

$$u(t) = K_I \int_0^t e(t) dt = 2 \int_0^t e(t) dt = t^2$$

c) Para el control proporcional-integral y un error de tipo escalón unitario tendremos que:

$$u(t) = e(t)K_P + \frac{K_P}{T_I} \int_0^t e(t) dt = 4 + 2t$$

Si el error es de tipo rampa unitaria tendremos que:

$$u(t) = e(t)K_P + \frac{K_P}{T_I} \int_0^t e(t) dt = 4t + t^2$$

d) Para el control proporcional-derivativo y un error de tipo escalón unitario tendremos que:

$$u(t) = e(t)K_P + T_D K_P \frac{de(t)}{dt} = 4e(t) + 3.2 \frac{de(t)}{dt} = 4$$

Si el error es de tipo rampa unitaria la salida será:

$$u(t) = e(t)K_P + T_D K_P \frac{de(t)}{dt} = 4e(t) + 3.2 \frac{de(t)}{dt} = 4t + 3.2$$

e) Para el control proporcional-integral-derivativo y un error de tipo escalón unitario tendremos que:

$$\begin{aligned} u(t) &= e(t)K_P + \frac{K_P}{T_I} \int_0^t e(t) dt + T_D K_P \frac{de(t)}{dt} = \\ &= 4e(t) + 2 \int_0^t e(t) dt + 3.2 \frac{de(t)}{dt} = 4 + 2t \end{aligned}$$

Si el error es de tipo rampa unitaria la salida será:

$$\begin{aligned}u(t) &= e(t)K_P + \frac{K_P}{T_I} \int_0^t e(t)dt + T_D K_P \frac{de(t)}{dt} = \\&= 4e(t) + 2 \int_0^t e(t)dt + 3.2 \frac{de(t)}{dt} = 4t + t^2 + 3.2\end{aligned}$$

Tema 7.:

Análisis de la respuesta transitoria

48.- Representar gráficamente la respuesta temporal ante entrada impulso y frente a entrada escalón unidad de los sistemas cuyos polos están ubicados en las siguientes posiciones:

a) $s = -1$

b) $s = -1+j$ $s = -1-j$

c) $s = -1$ (raíz doble)

d) $s = 0$ $s = 1$

e) $s = 1+j$ $s = 1-j$

f) $s = 0$ (raíz doble)

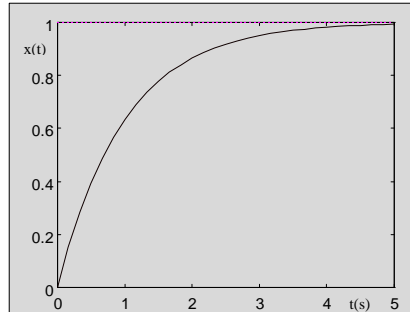
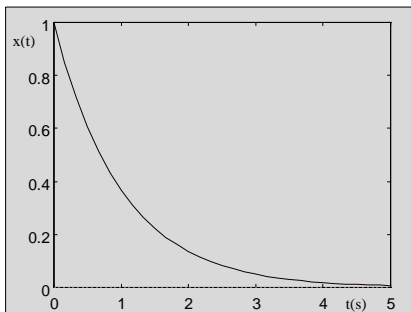
g) $s = 1$ (raíz doble)

h) $s = 0$

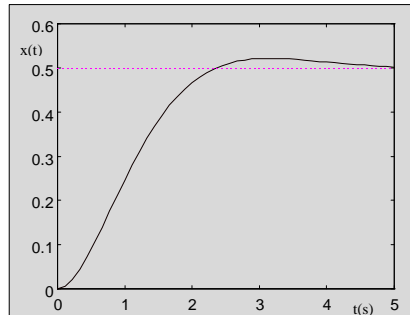
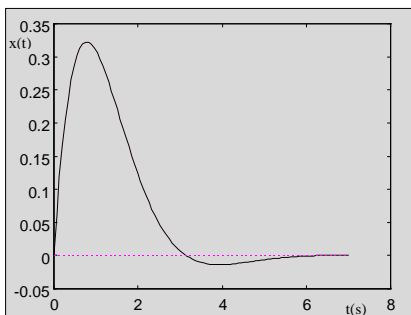
i) $s = -j$ $s = j$

Solución:

a) $s = -1$

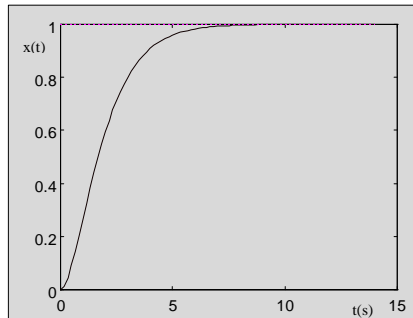
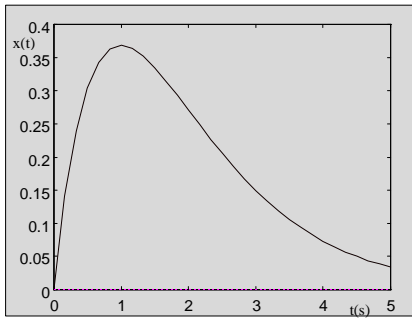


b) $s = -1+j$ $s = -1-j$

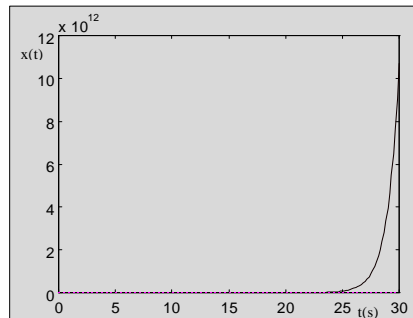
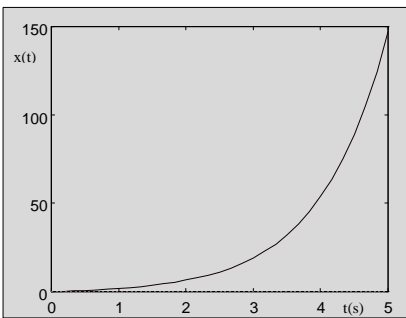


c) $s = -1$ (raíz doble)

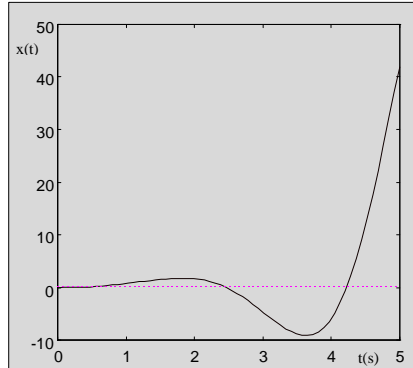
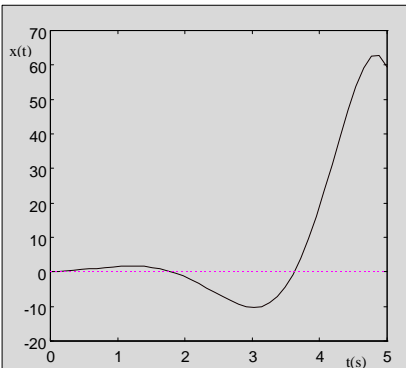
Automática: problemas resueltos



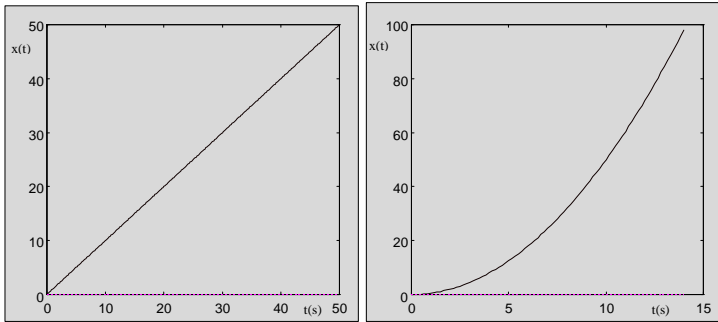
d) $s = 0$ $s = 1$



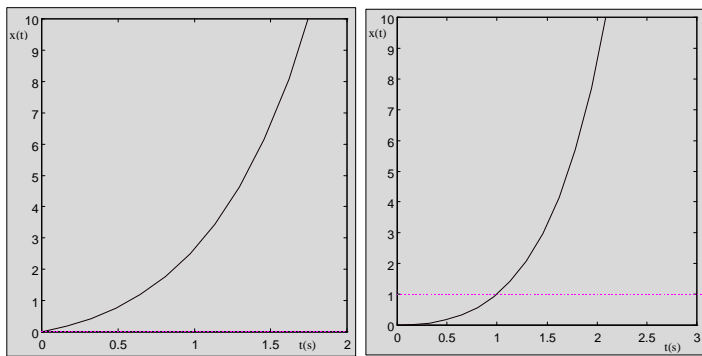
e) $s = 1+j$ $s = 1-j$



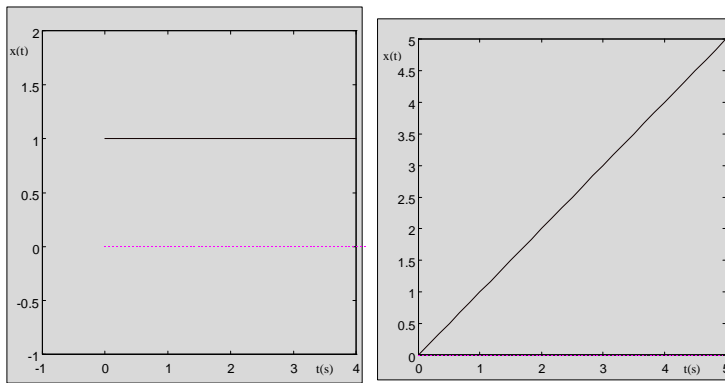
f) $s = 0$ (raíz doble)



g) $s = 1$ (raíz doble)

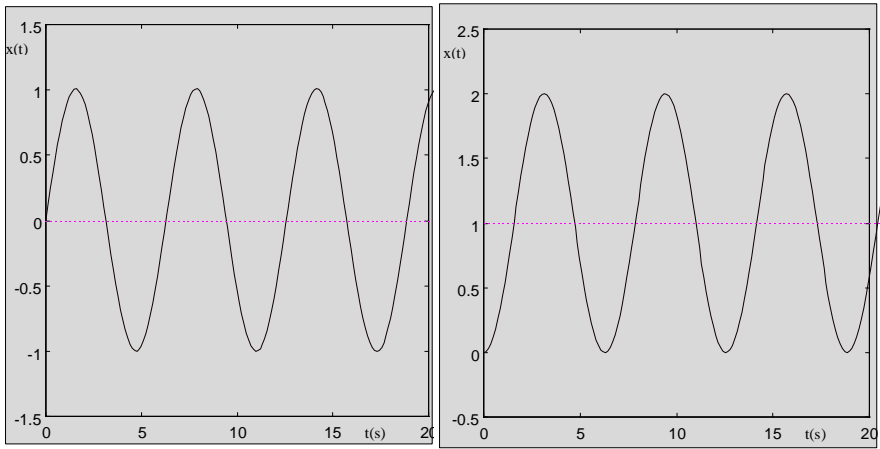


h) $s = 0$



i) $s = -j$ $s = j$

Automática: problemas resueltos



49.- Con base en el sistema de la figura 7.1, determinar los valores de K y k de modo que el sistema tenga una razón de amortiguamiento $\xi=0.7$ y una frecuencia natural no amortiguada $\omega_n= 4 \text{ rad/s}$.

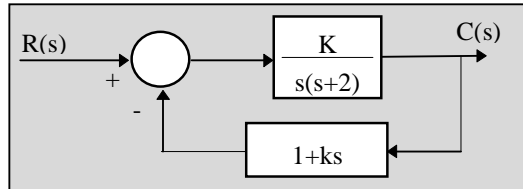


figura 7.1

Solución:

La función de transferencia del sistema de la figura 7.1 es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+2)}}{1 + \frac{K(1+ks)}{s(s+2)}} = \frac{K}{s(s+2) + K(1+ks)} = \frac{K}{s^2 + s(Kk+2) + K}$$

Si esta función de transferencia la comparamos con la de un sistema de segundo orden, normalizada en la forma

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{16}{s^2 + 5.6s + 16} = \frac{K}{s^2 + (Kk+2)s + K}$$

obtenemos que:

$$K=16 \text{ y } k=0.225$$

50.- Considerar el sistema de la figura 7.2. Comprobar que la función de transferencia $Y(s)/X(s)$ tiene un cero en el semiplano derecho del plano s . Hallar $y(t)$ cuando $x(t)$ es un escalón unitario. Representar $y(t)$ en función de t .

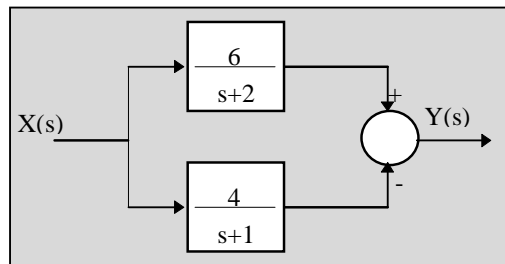


figura 7.2

Solución:

La función de transferencia viene dada por

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{6}{s+2} - \frac{4}{s+1} = \frac{6s+6-4s-8}{s^2+3s+2} = \frac{2(s-1)}{s^2+3s+2}$$

que tiene un cero en $s=1$ y dos polos, uno en $s=-1$ y otro en $s=-2$.

Si la entrada es la función escalón unitario, su transformada de Laplace es $X(s)=1/s$, por lo que la transformada de Laplace de la salida la podemos poner como

$$Y(s) = \frac{2(s-1)}{(s^2+3s+2)s}$$

que descompuesta en fracciones simples toma la forma

$$Y(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s}$$

donde A , B y C son los residuos correspondientes a cada uno de los polos y su valor lo podemos obtener de la siguiente forma:

$$A = \left. \frac{2(s-1)(s+1)}{(s^2 + 3s + 2)s} \right|_{s=-1} = 4$$

$$B = \left. \frac{2(s-1)(s+2)}{(s^2 + 3s + 2)s} \right|_{s=-2} = -3$$

$$C = \left. \frac{2(s-1)s}{(s^2 + 3s + 2)s} \right|_{s=0} = -1$$

con lo que $Y(s)$ la podemos expresar como:

$$Y(s) = \frac{4}{s+1} - \frac{3}{s+2} - \frac{1}{s}$$

y su transformada inversa de Laplace nos proporciona la salida del sistema ante entrada escalón que viene dada por la expresión:

$$y(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t} - 1$$

cuya representación gráfica se muestra en la figura 7.3.

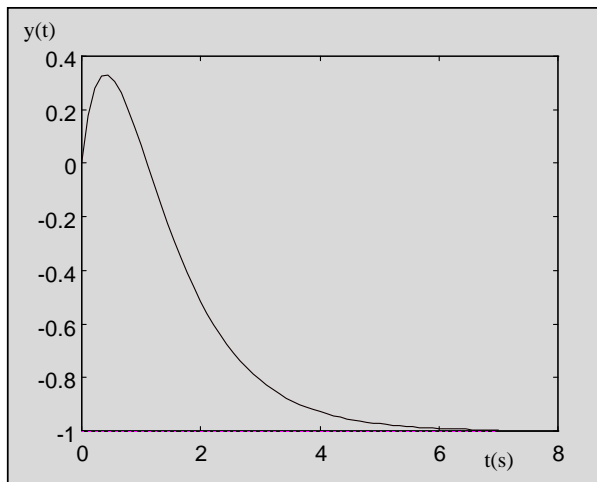


figura 7.3

51.- Un termómetro requiere un minuto para indicar el 98% de la respuesta a una entrada escalón. Suponiendo que el termómetro es un sistema de primer orden, hallar la constante de tiempo. Si el termómetro se coloca en un baño cuya temperatura varía linealmente a un ritmo de 10°/min, ¿cuánto error marca el termómetro?.

Solución:

Como sabemos que es un sistema de primer orden, su función de transferencia será de la forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

donde T es la constante de tiempo del sistema.

La respuesta ante una entrada escalón toma la forma:

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}$$

que al cabo de un minuto vale 0.98, por lo que

$$c(60) = 1 - e^{-60/T} = 0.98 \quad \Rightarrow \quad T = 15.34s = 0.26 \text{ minutos}$$

Si la temperatura es la señal de entrada, y sabemos que varía linealmente 10°/min, podemos afirmar que tiene la forma $u(t) = 10t$ (t medido en minutos), por lo que la transformada de Laplace de la salida la podemos poner como:

$$C(s) = \frac{10}{(Ts + 1)s^2} = \frac{10}{(0.26s + 1)s^2} = \frac{10}{s^2} - \frac{2.6}{s} + \frac{2.6}{s + 3.85}$$

cuya transformada inversa de Laplace nos proporciona la salida del termómetro colocado en el baño y que viene dada por la expresión:

$$c(t) = 10t - 2.6 + 2.6e^{-t/0.26}$$

Por ello, el error entre la temperatura del baño y la que marca el termómetro tiene la forma:

$$e(t) = |c(t) - u(t)| = \left| -2.6 + 2.6e^{-t/0.26} \right|$$

Según esto, tenemos que:

$$e(0) = 0^\circ$$

$$e(\infty) = 2.6^\circ$$

52.- Obtener la respuesta de un sistema con retroalimentación unitaria ante una entrada escalón unitario, siendo la función de transferencia de lazo abierto del sistema:

$$G(s) = \frac{4}{s(s+5)}$$

Solución:

La función de transferencia viene dada por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{4}{s(s+5)}}{1 + \frac{4}{s(s+5)}} = \frac{4}{s^2 + 5s + 4}$$

Si la entrada es el escalón unitario, su transformada de Laplace es $R(s)=1/s$, por lo que la transformada de Laplace de la salida la podemos poner como:

$$C(s) = \frac{4}{(s^2 + 5s + 4)s}$$

que tiene tres polos, uno en $s=0$, otro en $s=-1$ y el último en $s=-4$, por lo que la descomposición en fracciones simples toma la forma:

$$C(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s}$$

donde A, B y C son los residuos correspondientes a cada uno de los polos y su valor lo podemos obtener de la siguiente forma:

$$A = \left. \frac{4(s+1)}{(s^2 + 5s + 4)s} \right|_{s=-1} = -\frac{4}{3}$$

$$B = \left. \frac{4(s+4)}{(s^2 + 5s + 4)s} \right|_{s=-4} = \frac{1}{3}$$

$$C = \frac{4s}{(s^2 + 5s + 4)s} \Big|_{s=0} = 1$$

con lo que $Y(s)$ la podemos expresar como:

$$C(s) = -\frac{4}{3(s+1)} + \frac{1}{3(s+4)} + \frac{1}{s}$$

y su transformada inversa de Laplace nos proporciona la salida del sistema ante entrada escalón que viene dada por la expresión:

$$c(t) = -\frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} + 1$$

cuya representación gráfica se muestra en la figura 7.4.

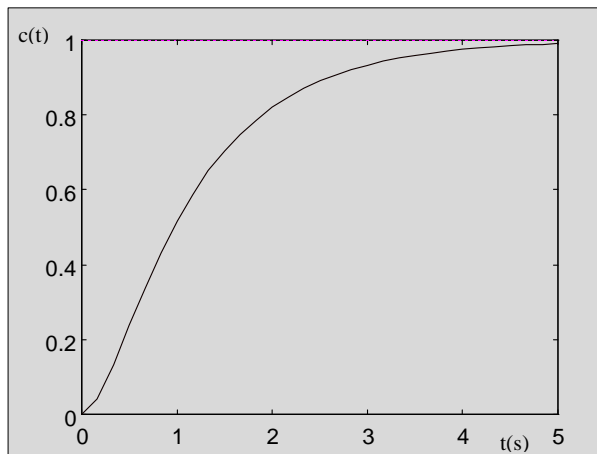


figura 7.4

que se corresponde con la respuesta de un sistema sobreamortiguado ya que el factor de amortiguamiento es mayor que uno.

53.- Considerar el sistema de la figura 7.5. Determinar el valor de K de modo que la relación de amortiguamiento ξ sea 0.5. Obtener el tiempo de crecimiento, el tiempo de pico, el sobreimpulso máximo y el tiempo de establecimiento para la respuesta ante una entrada escalón unitario.

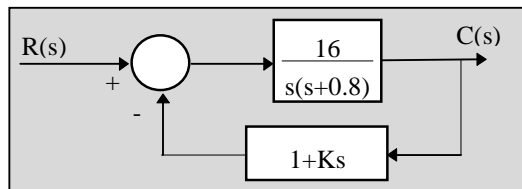


figura 7.5

Solución:

La función de transferencia del sistema de la figura 7.5 es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{16}{s(s+0.8)}}{1 + \frac{16(1+Ks)}{s(s+0.8)}} = \frac{16}{s(s+0.8) + 16(1+Ks)} = \frac{16}{s^2 + s(16K + 0.8) + 16}$$

Si esta función de transferencia la comparamos con la de un sistema de segundo orden, normalizada en la forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{16}{s^2 + s(16K + 0.8) + 16}$$

obtenemos que:

$$\omega_n = 4 \text{ rad/s}$$

$$K = 0.2$$

quedando la función de transferencia como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{16}{s^2 + 4s + 16}$$

por lo que el tiempo de respuesta o tiempo que tarda la señal de salida en alcanzar por primera vez el valor de estabilización, será:

$$t_r = \frac{\pi - \arctg \frac{\omega_d}{\xi \omega_n}}{\omega_d} = \frac{\pi - \arctg \frac{3.46}{2}}{3.46} = 0.6s$$

donde:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

es la frecuencia natural amortiguada.

El tiempo que tarda la respuesta del sistema en alcanzar el primer valor máximo es lo que se conoce como el tiempo de pico y viene dado por la expresión:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 0.91s$$

El sobreimpulso máximo es el valor de la salida en t_p por lo que viene dado por la expresión:

$$M_p = C(t_p) = 1 - e^{-\xi \omega_n t_p} \left(\cos \omega_d t_p - \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_d t_p \right) = 1.16$$

El valor del sobreimpulso máximo se suele expresar en tanto por ciento referido al valor de estabilización ante entrada escalón, que en este caso, será:

$$S\%M = 16\%$$

Por último, el tiempo de establecimiento es aquel que necesita la señal de salida para alcanzar y mantenerse en un rango alrededor del valor final. Este rango puede ser del 2% o del 5%.

Con el criterio del 2% el tiempo de establecimiento alcanza el valor de:

Automática: problemas resueltos

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\xi\omega_n} = 2s$$

y con el criterio del 5% el valor será:

$$t_s = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\xi\omega_n} = 1.5s$$

54.- Considerar la respuesta al escalón unitario de un sistema de retroalimentación unitaria cuya función de transferencia de lazo abierto es:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Obtener el tiempo de crecimiento, el tiempo de pico, el sobreimpulso máximo y el tiempo de establecimiento.

Solución:

La función de transferencia de lazo cerrado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1}{s(s+1)}}{1 + \frac{1}{s(s+1)}} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Si esta función de transferencia la comparamos con la de un sistema de segundo orden, normalizada en la forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

obtenemos que la frecuencia natural no amortiguada, el factor de amortiguamiento y la ganancia estática son, respectivamente:

$$\omega_n = 1 \text{ rad/s.} \quad \xi = 1/2 \quad K = 1$$

La frecuencia natural amortiguada viene dada por la expresión:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para calcular el tiempo de crecimiento, debemos conocer cuando la respuesta ante una entrada escalón unidad toma el valor unidad por primera vez, y esto ocurre cuando:

Automática: problemas resueltos

$$\cos \omega_d t = -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \omega_d t$$

por lo que el tiempo de respuesta será:

$$t_r = \frac{\pi - \operatorname{arctg} \frac{\omega_d}{\xi \omega_n}}{\omega_d} = 2.41s$$

El tiempo que tarda la respuesta del sistema en alcanzar el primer valor máximo es lo que se conoce como el tiempo de pico y viene dado por la expresión:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 3.63s$$

El sobreimpulso máximo es el valor de la salida en tiempo de pico por lo que viene dado por la expresión:

$$M_p = C(t_p) = 1 - e^{-\xi \omega_n t_p} \left(\cos \omega_d t_p - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \omega_d t_p \right) = 1.16$$

El valor del sobreimpulso máximo se suele expresar en tanto por ciento referido al valor de estabilización ante entrada escalón, que en este caso será:

$$S\%M = 16\%$$

Por último, el tiempo de establecimiento es aquel que necesita la señal de salida para alcanzar y mantenerse en un rango alrededor del valor final. Este rango puede ser del 2% o del 5% de dicho valor.

Con el criterio del 2% el tiempo de establecimiento alcanza el valor de:

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\xi \omega_n} = 8s$$

55.- Considerar el sistema de lazo cerrado dado por:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Determinar los valores de ξ y ω_n , de modo que el sistema responda a una entrada escalón con aproximadamente el 5% de sobreimpulso y un tiempo de establecimiento de 2 segundos. (Utilizar el criterio del 2%).

Solución:

El sobreimpulso máximo porcentual para una entrada escalón unitario viene dado por la expresión:

$$M_p = 100e^{-\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\pi} \% = 5\%$$

Si calculamos el logaritmo neperiano en ambos miembros de la ecuación tenemos que:

$$-\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\pi = \ln \frac{5}{100} = -3 \Rightarrow \xi = 0.69$$

Como tenemos un factor de amortiguamiento $\xi=0.69$, el sistema es subamortiguado y con el criterio del 2% el tiempo de establecimiento queda como:

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 2s$$

de donde obtenemos que la frecuencia natural no amortiguada vale:

$$\omega_n = \frac{4}{\xi t_s} = 2.89 \text{ rad / s}$$

56.- La planta de primer orden de la figura 7.6 tiene, como respuesta al escalón unidad, la señal representada en la figura 7.7. Encontrar los parámetros de la función de transferencia. La planta es conectada a un sistema de bucle cerrado como muestra la figura 7.8. Dibujar la respuesta del sistema de lazo cerrado ante el escalón unidad.

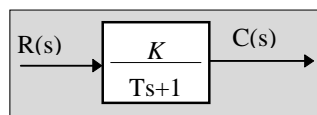


figura 7.6

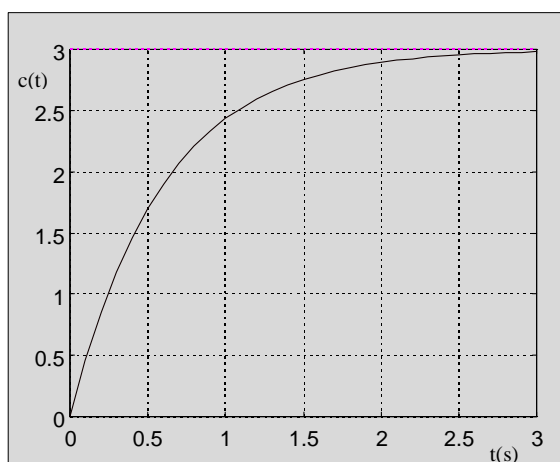


figura 7.7

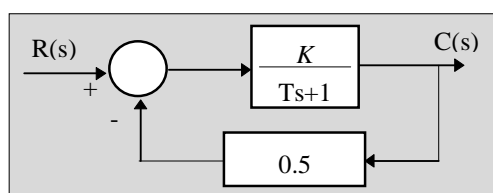


figura 7.8

Solución:

La transformada de Laplace de la señal de salida, para una entrada escalón, viene dada por la expresión:

$$C(s) = \frac{K}{(Ts+1)s} = \frac{\frac{K}{T}}{(s + \frac{1}{T})s} = \frac{A}{(s + \frac{1}{T})} + \frac{B}{s}$$

donde A y B son los residuos de cada uno de los polos y su valor viene dado como:

$$A = \left. \frac{\frac{K}{T}(s + \frac{1}{T})}{(s + \frac{1}{T})s} \right|_{s = -\frac{1}{T}} = \left. \frac{K}{T} \right|_{s = -\frac{1}{T}} = -K$$

$$B = \left. \frac{\frac{K}{T}s}{(s + \frac{1}{T})s} \right|_{s=0} = \left. \frac{K}{T} \right|_{s=0} = K$$

con lo que C(s) toma la forma:

$$C(s) = -\frac{K}{(s + \frac{1}{T})} + \frac{K}{s}$$

cuya transformada inversa de Laplace se corresponde con la respuesta del sistema ante una entrada escalón unidad y tiene la forma:

$$c(t) = -Ke^{-\frac{t}{T}} + K$$

Si calculamos el valor de estabilización y lo comparamos con los datos de la figura 7.7, obtenemos que:

Automática: problemas resueltos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 3 = \lim_{t \rightarrow \infty} (-Ke^{-\frac{t}{T}} + K) = K$$

Por otro lado, en la figura 7.7 observamos que $c(1)=2.43$ por lo que con la expresión analítica de $c(t)$ podemos obtener T de la siguiente forma:

$$c(1) = -3e^{-\frac{1}{T}} + 3 = 2.43 \quad \Rightarrow \quad T = 0.6s$$

Por tanto, la respuesta ante una entrada escalón cuya gráfica es la mostrada en la figura 7.7 tiene la forma:

$$c(t) = -3e^{-\frac{t}{0.6}} + 3$$

Si el sistema es el mostrado en la figura 7.8, la nueva función de transferencia es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{3}{0.6s+1}}{1 + \frac{1.5}{0.6s+1}} = \frac{3}{0.6s+1+1.5} = \frac{3}{0.6s+2.5}$$

que con una entrada escalón, se puede descomponer en fracciones simples de la siguiente forma:

$$C(s) = \frac{3}{(0.6s+2.5)s} = \frac{5}{(s+4.17)s} = \frac{A}{s+4.17} + \frac{B}{s}$$

donde:

$$A = \left. \frac{5(s+4.17)}{(s+4.17)s} \right|_{s=-4.17} = -1.2$$

$$B = \left. \frac{5s}{(s+4.17)s} \right|_{s=0} = 1.2$$

con lo que la transformada de Laplace de la salida ante una entrada escalón queda como:

$$C(s) = -\frac{1.2}{s + 4.17} + \frac{1.2}{s}$$

y su transformada inversa de Laplace nos permite obtener la salida del sistemas ante una entrada escalón que viene dada por la expresión:

$$c(t) = -1.2e^{-4.17t} + 1.2$$

y su representación gráfica es la mostrada en la figura 7.9.

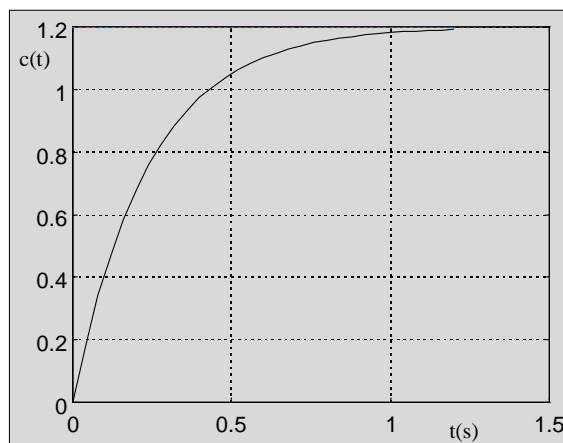


figura 7.9

57.- La figura 7.10 muestra el sistema de control de postura de un satélite. Escribir la función de transferencia para el sistema de control de postura. El sistema es predispuesto para asumir una postura de 10° ($\theta_r(t)=10u(t)$). Después de la respuesta transitoria, ¿cuál es el ángulo del satélite [$\theta_s(t)$]?. Encontrar el valor de K_v para que el tiempo de respuesta ante una entrada escalón sea mínimo.

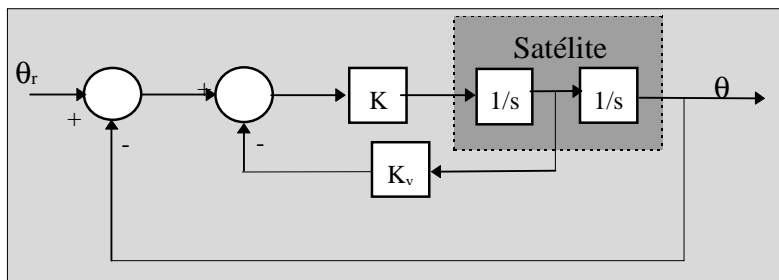


figura 7.10

Solución:

Si reducimos este diagrama de bloques obtenemos los mostrados desde la figura 7.11 a la figura 7.13.

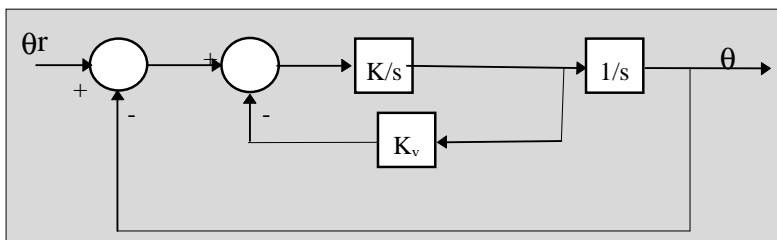


figura 7.11

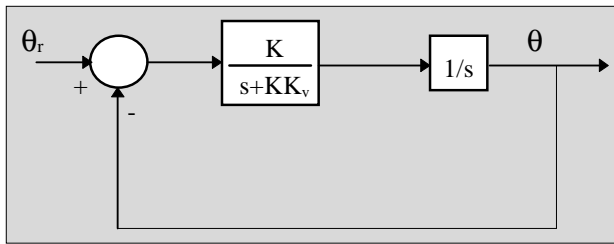


figura 7.12

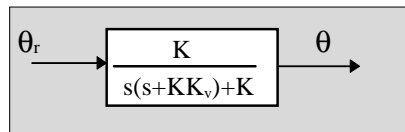


figura 7.13

Por tanto, la función de transferencia del sistema de control de postura es:

$$\frac{\theta}{\theta_r} = \frac{K}{s^2 + KK_v s + K}$$

Si la entrada es $\theta_r(t) = 10u(t)$, su transformada de Laplace es $\theta_r(s) = 10/s$ y la transformada de Laplace de la salida queda como:

$$\theta(s) = \frac{10K}{s(s^2 + KK_v s + K)}$$

que descompuesta en fracciones simples toma la forma:

$$\theta(s) = \frac{10K}{s(s^2 + KK_v s + K)} = \frac{A}{s + s_1} + \frac{B}{s + s_2} + \frac{C}{s}$$

donde:

$$s_{1,2} = \frac{-KK_v \pm \sqrt{(KK_v)^2 - 4K}}{2}$$

Automática: problemas resueltos

$$C = \left. \frac{10Ks}{s(s^2 + KK_v s + K)} \right|_{s=0} = 10$$

por lo que si calculamos la transformada inversa de Laplace de $\theta(s)$ obtenemos:

$$\theta(t) = Ae^{-s_1 t} + Be^{-s_2 t} + 10$$

cuyo límite cuando el tiempo se hace muy grande toma el valor:

$$\theta_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 10$$

Para encontrar el valor de K_v para que el tiempo de respuesta ante una entrada escalón sea mínimo, debemos comparar la función de transferencia del sistema con la de un sistema de segundo orden cuyo factor de amortiguamiento sea la unidad, es decir:

$$\frac{\theta(s)}{\theta_r(s)} = \frac{K}{s^2 + KK_v s + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

de donde:

$$K = \omega_n^2 \quad \Rightarrow \quad K_v = \frac{2\sqrt{K}}{K}$$
$$KK_v = 2\xi\omega_n = 2\omega_n$$

58.- Dado el sistema de la figura 7.14, si $r(t)=5u(t)$, encontrar el valor de estado estacionario de $c(t)$. ¿Esperas que la respuesta transitoria sea oscilatoria?. Justifica la respuesta.

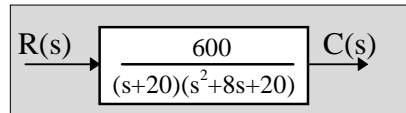


figura 7.14

Solución:

Para obtener el valor de estado estacionario de $c(t)$ para una entrada $r(t)=5u(t)$, debemos obtener la transformada inversa de Laplace de $C(s)$ cuando $R(s)=5/s$, es decir:

$$C(s) = \frac{3000}{(s+20)(s^2+8s+20)s}$$

cuya descomposición en fracciones parciales es:

$$C(s) = \frac{3000}{(s+20)(s^2+8s+20)s} = \frac{A}{s+20} + \frac{B}{s+4+2j} + \frac{C}{s+4-2j} + \frac{D}{s}$$

donde A , B , C y D son los residuos correspondientes a cada uno de los polos de $C(s)$ y podemos obtenerlos como:

$$A = \left. \frac{3000(s+20)}{(s+20)(s^2+8s+20)s} \right|_{s=-20} = -0.6$$

$$D = \left. \frac{3000s}{(s+20)(s^2+8s+20)s} \right|_{s=0} = 7.5$$

$$s_{1,2} = -4 \pm 2j$$

La respuesta tendrá por tanto la forma:

Automática: problemas resueltos

$$c(t) = 0.6e^{-20t} + e^{-4t} (\Gamma_r \cos 2t - \Gamma_i \sen 2t) + 7.5$$

Según esto, la salida en estado estacionario viene dada por:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0.6e^{-20t} + e^{-4t} (\Gamma_r \cos 2t - \Gamma_i \sen 2t) + 7.5 = 7.5$$

Es evidente que la respuesta oscila ya que posee dos polos complejos conjugados en su función de transferencia.

Tema 8 :

Precisión

59.- Dado el sistema realimentado de la figura 8.1, controlado por un regulador proporcional, calcular el rango de valores de K para los que es estable y la diferencia en régimen permanente entre la referencia $R(s)$ y la salida $C(s)$ ante una entrada escalón unitario es menor o igual al 3% de la señal de referencia.

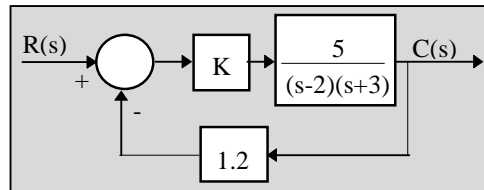


figura 8.1

Solución:

Para analizar la estabilidad del sistema, aplicaremos el criterio de Routh por lo que comenzaremos calculando la función de transferencia de lazo cerrado en la forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{5K}{(s-2)(s+3)}}{1 + \frac{5K}{(s-2)(s+3)} \cdot 1.2} = \frac{5K}{s^2 + s + (6K - 6)}$$

La matriz de Routh calculada a partir de la ecuación característica del sistema es:

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 1 & 6K - 6 \\ s^1 & 1 & \\ s^0 & 6K - 6 & \end{array}$$

Para que el sistema sea estable, los elementos de la primera columna deben ser positivos, es decir:

$$\{6K - 6 > 0\} \Rightarrow K > 1$$

Por tanto, el sistema es estable para $K > 1$.

Para obtener los valores de K para que la diferencia en régimen permanente entre la referencia y la salida ante una entrada escalón unitario sea menor o igual al 3% de la señal de referencia, debemos de calcular el siguiente límite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - c(t)) < 0.03\%$$

Aplicamos el teorema del valor final, y tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - c(t)) = \lim_{s \rightarrow 0} (R(s) - C(s))s = \lim_{s \rightarrow 0} \left(R(s) - \frac{5K}{s^2 + s + (6K - 6)} R(s) \right) s$$

Si la entrada es el escalón unidad, tenemos que $R(s) = 1/s$ y la expresión queda como:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(1 - \frac{5K}{s^2 + s + (6K - 6)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{s^2 + s + (6K - 6) - 5K}{s^2 + s + (6K - 6)} \right) = \frac{K - 6}{6K - 6} < 0.03$$

Como para que el sistema sea estable sabemos que debe cumplir que:

$$\{6K - 6 > 0\}$$

podemos afirmar que:

$$|K - 6| < 0.18K - 0.18$$

en donde podemos tener dos casos.

Caso1.- Si

$$1 < K < 6$$

entonces:

$$6 - K < 0.18K - 0.18$$

de donde obtenemos que:

$$5.23 < K < 6$$

Caso2.- Si

$$K > 6$$

Automática: problemas resueltos

entonces:

$$K - 6 < 0.18K - 0.18$$

de donde obtenemos que:

$$6 < K < 7.1$$

Por tanto, el rango de valores que cumplen las dos especificaciones del enunciado es:

$$5.23 < K < 7.1$$

60.- Sea el sistema cuya función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5 - 3s^2}{s^3 + 3s^2 + 2s + 5}$$

Determinar el error en régimen permanente que hay entre la entrada y la salida cuando la entrada es un escalón unitario, una rampa unitaria o una parábola unitaria. Suponer $H(s)=2$.

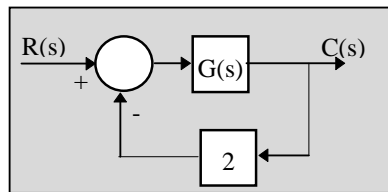


figura 8.2

Solución:

La figura 8.2 muestra el diagrama de bloques de un sistema realimentado, de donde podemos obtener la expresión del error en régimen permanente entre la entrada y la salida como:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - 2c(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} s [R(s) - 2C(s)] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[R(s) - \frac{10 - 6s^2}{s^3 + 3s^2 + 2s + 5} R(s) \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s R(s) \left[\frac{s^3 + 3s^2 + 2s + 5 + 6s^2 - 10}{s^3 + 3s^2 + 2s + 5} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s R(s) \left[\frac{s^3 + 9s^2 + 2s - 5}{s^3 + 3s^2 + 2s + 5} \right] \end{aligned}$$

Si la entrada es el escalón unitario, $R(s)=1/s$ y el error en régimen permanente entre la entrada y la salida queda como:

Automática: problemas resueltos

$$\varepsilon_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{s^3 + 9s^2 + 2s - 5}{s^3 + 3s^2 + 2s + 5} \right] = -1$$

Si la entrada es la rampa unitaria, $R(s)=1/s^2$ y el error queda como:

$$\varepsilon_2 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[\frac{s^3 + 9s^2 + 2s - 5}{s^3 + 3s^2 + 2s + 5} \right] = -\infty$$

Por último, si la entrada es una parábola unitaria, $R(s)=1/s^3$ y dicho error queda como:

$$\varepsilon_3 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \left[\frac{s^3 + 9s^2 + 2s - 5}{s^3 + 3s^2 + 2s + 5} \right] = -\infty$$

61.- Dado el sistema realimentado de la figura 8.3, controlado por un regulador proporcional, calcular el rango de valores de K para los que el sistema es estable y el error en régimen permanente ante entrada escalón es menor o igual al 5% de la referencia. Obtener también, para cualquier valor de K , la diferencia en régimen permanente entre la referencia y la salida ante una entrada escalón unitario.

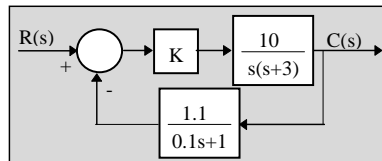


figura 8.3

Solución:

Para analizar la estabilidad del sistema, aplicaremos el criterio de Routh por lo que comenzaremos calculando la función de transferencia de lazo cerrado en la forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{10K}{s(s+3)}}{1 + \frac{10K}{s(s+3)} \frac{1.1}{0.1s+1}} = \frac{10K(0.1s+1)}{0.1s^3 + 1.3s^2 + 3s + 11K}$$

La matriz de Routh calculada a partir de la ecuación característica del sistema es:

| | | |
|-------|--------------|-----|
| s^3 | 0.1 | 3 |
| s^2 | 1.3 | 11K |
| s^1 | $3.9 - 1.1K$ | |
| | 1.3 | |
| s^0 | $11K$ | |

Para que el sistema sea estable, los elementos de la primera columna deben ser positivos, es decir

Automática: problemas resueltos

$$\left\{ \begin{array}{l} 3.9 - 11K > 0 \\ 11K > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K < 3.54 \\ K > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < K < 3.54$$

Por tanto, el sistema es estable para

$$0 < K < 3.54$$

Por otra parte, ante entrada escalón unitario, por ser el sistema a controlar de tipo uno, el error en régimen permanente es nulo para cualquier valor de K que haga estable el sistema. En definitiva, el intervalo de valores:

$$0 < K < 3.54$$

cumple las dos condiciones: que el sistema sea estable y que el error en régimen permanente ante entrada escalón sea menor o igual al 5% de la referencia.

Para obtener, para cualquier valor de K , la diferencia en régimen permanente entre la referencia y la salida ante una entrada escalón unitario debemos de calcular el siguiente límite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - c(t))$$

Aplicamos el teorema del valor final, y tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - c(t)) &= \lim_{s \rightarrow 0} (R(s) - C(s))s = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(R(s) - \frac{10K(0.1s + 1)}{0.1s^3 + 1.3s^2 + 3s + 11K} R(s) \right) s \end{aligned}$$

Si la entrada es el escalón unidad $R(s)=1/s$ y la expresión queda como

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - c(t)) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(1 - \frac{10K(0.1s + 1)}{0.1s^3 + 1.3s^2 + 3s + 11K} \right) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{0.1s^3 + 1.3s^2 + 3s + 11K - 10K(0.1s + 1)}{0.1s^3 + 1.3s^2 + 3s + 11K} \right) = \frac{1}{11} \end{aligned}$$

Que será válido sólo para aquellos valores para los que exista este límite.

62.- Dado el sistema realimentado de la figura 8.4, se pide:

- Calcular el rango de valores de K para los que el sistema es estable.
- Obtener los valores de K que hacen que el error en régimen permanente ante una entrada escalón unitario del sistema anterior sea menor o igual al 5%.
- Dibujar de forma aproximada la respuesta del sistema ante una entrada escalón unitario, suponiendo $K=20$. Indicar el valor aproximado de los distintos parámetros de la curva obtenida.

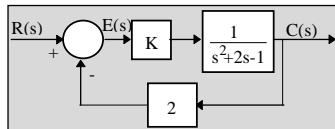


figura 8.4

Solución:

a) Para analizar la estabilidad del sistema, aplicaremos el criterio de Routh por lo que comenzaremos calculando la función de transferencia de lazo cerrado en la forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{s^2 + 2s - 1}}{1 + \frac{2K}{s^2 + 2s - 1}} = \frac{K}{s^2 + 2s + 2K - 1}$$

La matriz de Routh calculada a partir de la ecuación característica del sistema es:

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 1 & 2K - 1 \\ s^1 & 2 & \\ s^0 & 2K - 1 & \end{array}$$

Para que el sistema sea estable, los elementos de la primera columna deben ser positivos, es decir:

Automática: problemas resueltos

$$K > \frac{1}{2}$$

b) Por otra parte, el error en régimen permanente se puede poner como:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

Si aplicamos el teorema del valor final tenemos que:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

y si la entrada es el escalón unitario, $R(s)=1/s$ y la expresión queda como

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{2K}{s^2 + 2s - 1}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 2s - 1}{s^2 + 2s - 1 + 2K} = \frac{1}{1 - 2K}$$

Los valores de K para los que el sistema es estable, hacen que el error en estado estacionario ante entrada escalón sea negativo, por lo que para obtener los valores de K que hacen que dicho error sea menor o igual al 5% debemos resolver la inecuación:

$$\left\{ \frac{1}{2K - 1} < 0.05 \right\} \Rightarrow \{K > 10.5\}$$

c) Para obtener la respuesta ante entrada escalón cuando $K=20$, debemos obtener la transformada inversa de Laplace de:

$$C(s) = \frac{20}{s^2 + 2s + 39} R(s) = \frac{20}{(s^2 + 2s + 39)s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1 + 6.1j} + \frac{C}{s + 1 - 6.1j}$$

que viene expresada como:

$$c(t) = 0.51 - e^{-t}(0.51 \cos 6.1t + 0.083 \sin 6.1t)$$

La representación gráfica de la salida $c(t)$ la mostramos en la figura 8.5.

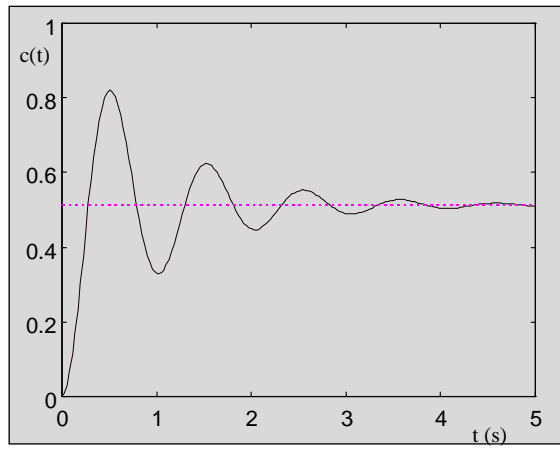


figura 8.5

Tema 9 :

Criterio de estabilidad de Routh

63.- Considerar el sistema de control con realimentación unitaria y la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

$$G(s) = \frac{10}{s(s-1)(2s+3)}$$

¿Es estable este sistema?

Solución:

La función de transferencia de lazo cerrado para este sistema es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{10}{s(s-1)(2s+3)}}{1 + \frac{10}{s(s-1)(2s+3)}} = \frac{10}{s(s-1)(2s+4)+10}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{2s^3 + s^2 - 3s + 10}$$

Por tanto, su ecuación característica será:

$$f(s) = 2s^3 + s^2 - 3s + 10 = 0$$

y la matriz de coeficientes de Routh es:

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 2 & -3 \\ s^2 & 1 & 10 \\ s^1 & -23 & \\ s^0 & 10 & \end{array}$$

En la primera columna se producen dos cambios de signo, por lo que podemos asegurar que el sistema realimentado es inestable y tiene dos polos en el semiplano derecho del plano s.

Automática: problemas resueltos

64.- Sea el sistema de ecuación característica

$$s^3 + s^2 + as - b = 0$$

Calcular los valores de a y b que hacen estable el sistema.

Solución:

La matriz de coeficientes de Routh para esta ecuación característica viene dada por:

$$\begin{array}{r} s^3 \quad 1 \quad a \\ s^2 \quad 1 \quad -b \\ s^1 \quad a+b \\ s^0 \quad -b \end{array}$$

Cuando todos los elementos de la primera columna sean positivos, podemos asegurar que el sistema, es estable. Por ello, debe de cumplirse que

$$\left. \begin{array}{l} a+b > 0 \\ -b > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a > -b \\ b < 0 \end{array}$$

65.- Aplicar el criterio de estabilidad de Routh a la siguiente ecuación característica:

$$s^4 + s^3 + ks^2 + s + 1 = 0$$

Solución:

La matriz de coeficientes de Routh para la ecuación característica viene dada por:

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & k & 1 \\ s^3 & 1 & 1 & 0 \\ s^2 & k-1 & 1 & \\ s^1 & \frac{k-2}{k-1} & & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

Para asegurarnos que el sistema es estable debemos exigir que los elementos de la primera columna sean mayores que cero. Por tanto, tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} k-1 > 0 \\ \frac{k-2}{k-1} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k > 1 \\ k > 2 \end{array} \right\} \Rightarrow k > 2$$

y podemos asegurar que el sistema es estable para los valores de K tales que:

$$k > 2$$

66.- Estudiar la estabilidad del sistema cuya ecuación característica es:

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 2 = 0$$

Solución:

La matriz de coeficientes de Routh viene dada por:

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 3 & 2 \\ s^3 & 3 & 3 & 0 \\ s^2 & 2 & 2 & \\ s^1 & 0 & 0 & \\ s^0 & & & \end{array}$$

Todos los términos de la línea s^1 son cero, por lo que debemos formar el polinomio auxiliar con los coeficientes de la línea s^2 . Dicho polinomio es:

$$P(s) = 2s^2 + 2$$

La derivada de $P(s)$ respecto de s es:

$$\frac{dP(s)}{ds} = 4s$$

y sustituimos los términos de la fila s^1 por los coeficientes de esta derivada y la matriz de coeficientes de Routh queda como:

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 3 & 2 \\ s^3 & 3 & 3 & 0 \\ s^2 & 2 & 2 & \\ s^1 & 4 & 0 & \\ s^0 & 2 & & \end{array}$$

Vemos que en la primera columna del nuevo conjunto no hay cambios de signo. Por tanto, la ecuación original no tiene raíces con parte real positiva y podemos afirmar que el sistema es estable.

67.- Razonar si existe en el semiplano derecho alguna raíz de la ecuación $1+G(s)=0$ donde $G(s)$ viene dada por:

$$G(s) = \frac{10}{s(0.1s + 1)(0.5s + 1)(s + 1)}$$

Solución:

La ecuación $1+G(s)=0$ se corresponde con la ecuación característica de un sistema con realimentación unitaria y función de transferencia de lazo abierto $G(s)$ y la expresamos como:

$$1 + \frac{10}{s(0.1s + 1)(0.5s + 1)(s + 1)} = \frac{s(0.1s + 1)(0.5s + 1)(s + 1) + 10}{s(0.1s + 1)(0.5s + 1)(s + 1)} = 0$$

es decir:

$$0.05s^4 + 0.65s^3 + 1.6s^2 + s + 10 = 0$$

La matriz de coeficientes de Routh para esta ecuación característica viene dada por:

| | | | |
|-------|-------|-----|----|
| s^4 | 0.05 | 1.6 | 10 |
| s^3 | 0.65 | 1 | |
| s^2 | 1.52 | 10 | |
| s^1 | -3.27 | | |
| s^0 | 10 | | |

Para asegurar la estabilidad del sistema es necesario que todos los elementos de la primera columna sean positivos. Como no sucede así y además se producen dos cambios de signo en dichos elementos, podemos asegurar que la ecuación de partida tiene dos raíces en el semiplano derecho que hacen que el sistema con dicha ecuación característica sea inestable y tiene dos polos en el semiplano derecho del plano s .

68.- Obtener para qué intervalos de la constante ajustable K , todas las raíces de los siguientes polinomios están en el semiplano izquierdo del plano complejo.

a) $2s^3 + (6 - 2K)s^2 + (4 + 3K)s + 10 = D_1(s)$

b) $s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + 4 + K = D_2(s)$

Solución:

a) Consideraremos el polinomio $D_1(s)$ como la ecuación característica de un sistema al que le queremos analizar su estabilidad. Para ello, calcularemos la matriz de coeficientes de Routh como sigue:

$$\begin{array}{r} s^3 \quad \quad \quad 2 \quad \quad \quad 4 + 3K \\ s^2 \quad \quad \quad 6 - 2K \quad \quad \quad 10 \\ s^1 \quad \quad \quad \frac{(6 - 2K)(4 + 3K) - 20}{6 - 2K} \\ s^0 \quad \quad \quad 10 \end{array}$$

Los elementos de la primera columna deben de ser positivos para que todas las raíces del polinomio $D_1(s)$ tengan parte real negativa, por lo que debe de cumplirse que:

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 - 2K > 0 \\ (6 - 2K)(4 + 3K) - 20 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K < 3 \\ K \in [-0.27, 2] \end{array} \right\} \Rightarrow K \in [0, 2]$$

donde hemos tenido en cuenta que K debe ser positivo.

b) Para el polinomio $D_2(s)$ procederemos de igual forma que en el caso anterior, calculando la matriz de coeficientes de Routh como sigue:

$$\begin{array}{r} s^4 \quad \quad 1 \quad \quad 3 \quad \quad 4 + K \\ s^3 \quad \quad 1 \quad \quad 2 \\ s^2 \quad \quad 1 \quad \quad 4 + K \\ s^1 \quad \quad -(2 + K) \\ s^0 \quad \quad K + 4 \end{array}$$

Los elementos de la primera columna deben de ser positivos para que todas las raíces del polinomio $D_2(s)$ tengan parte real negativa, por lo que debe de cumplirse que:

$$\begin{cases} -(2 + K) > 0 \\ K + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K < -2 \\ K > -4 \end{cases}$$

Si tenemos en cuenta que K debe ser positivo, llegamos a la conclusión de que para cualquier valor de K siempre hay alguna raíz del polinomio $D_2(s)$ en el semiplano derecho del plano s .

69.- Calcular la relación que debe existir entre el valor máximo de la ganancia A y k para que sea estable el sistema con ecuación característica:

$$kT^3s^3 + (1+k)T^2s^2 + Ts + A = D(s)$$

Solución:

La matriz de coeficientes de Routh viene dada por:

$$\begin{array}{ccc} s^3 & kT^3 & T \\ s^2 & (1+k)T^2 & A \\ s^1 & \frac{(1+k-kA)T}{(1+k)} & \\ s^0 & A & \end{array}$$

Si suponemos que k , T y A son positivos, la exigencia de que todos los elementos de la primera columna sean positivos para que el sistema sea estable, se reduce a obligar a que:

$$(1+k-kA) > 0$$

es decir, que:

$$\frac{1+k}{k} > A$$

El valor máximo de la ganancia A para que el sistema sea estable es:

$$A = \frac{1+k}{k}$$

70.- Determinar el rango de valores de K para que sea estable el sistema de control con realimentación unitaria cuya función de transferencia de lazo abierto es:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

Solución:

La ecuación $1+G(s)=0$ se corresponde con la ecuación característica de un sistema con realimentación unitaria y cuya función de transferencia de lazo abierto es $G(s)$ y se puede expresar como

$$1 + G(s) = 1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \frac{s(s+1)(s+2) + K}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

es decir:

$$s(s+1)(s+2) + K = 0 \quad \Rightarrow \quad s^3 + 3s^2 + 2s + K$$

La matriz de Routh para esta ecuación viene dada por:

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & \frac{6-K}{3} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

Para asegurar la estabilidad del sistema es necesario que todos los elementos de la primera columna sean positivos por lo que:

$$\begin{array}{l} \frac{6-K}{3} > 0 \\ K > 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 0 < K < 6$$

Para este rango de valores de K podemos asegurar que el sistema es estable y no posee ningún polo a la derecha del eje imaginario del plano s .

71.- Determinar el intervalo de valores de K para los que es estable el sistema de realimentación unitaria y función de transferencia de lazo abierto

$$G(s) = \frac{K}{s[(s+1)(s+2)(s+5) + K]}$$

Solución:

La función de transferencia de lazo cerrado es:

$$F(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{s^4 + 8s^3 + 17s^2 + (10+K)s + K}$$

Por tanto, su ecuación característica será:

$$EC(s) = s^4 + 8s^3 + 17s^2 + (10+K)s + K = 0$$

La matriz de coeficientes de Routh viene dada por:

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 17 & K \\ s^3 & 8 & 10+K & \\ s^2 & \frac{126-K}{8} & K & \\ s^1 & \frac{1260-K^2+52K}{126-K} & & \\ s^0 & K & & \end{array}$$

Para asegurarnos que el sistema es estable debemos exigir que los elementos de la primera columna sean mayores que cero. Por tanto:

$$\begin{array}{l} 126-K > 0 \\ 1260-K^2+52K > 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} K < 126 \\ -18 < K < 70 \end{array}$$

Por tanto, si suponemos que $K > 0$, el sistema es estable cuando:

$$0 < K < 70$$

72.- Determinar, aplicando el criterio de Routh, para que valores de K_1 y K el sistema mostrado en la figura 9.1 es estable. ¿Sería estable para $K_1=1$?, ¿y para $K=-1$?, ¿y para $K_1=3$, con $K=-0.5$?

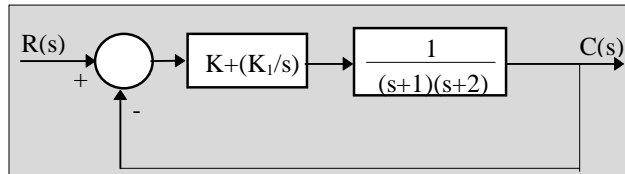


figura 9.1

Solución:

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema representado por el diagrama de bloques de la figura 9.1 es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(K + \frac{K_1}{s})(\frac{1}{(s+1)(s+2)})}{1 + (K + \frac{K_1}{s})(\frac{1}{(s+1)(s+2)})} = \frac{Ks + K_1}{s^3 + 3s^2 + (2 + K)s + K_1}$$

La matriz de coeficientes de Routh correspondientes a la ecuación característica:

$$s^3 + 3s^2 + (2 + K)s + K_1 = 0$$

es:

| | | |
|-------|--------------------------|---------|
| s^3 | 1 | $2 + K$ |
| s^2 | 3 | K_1 |
| s^1 | $\frac{6 + 3K - K_1}{3}$ | |
| s^0 | K_1 | |

Para que el sistema sea estable deben de ser positivos los elementos de la primera columna, por lo que debe cumplirse que:

Automática: problemas resueltos

$$\begin{aligned}K_1 &> 0 \\6 + 3K - K_1 &> 0\end{aligned}$$

Los valores de K_1 y K para los que el sistema es estable son:

$$\begin{aligned}K_1 &> 0 \\K &> \frac{K_1}{3} - 2\end{aligned}$$

*El sistema será estable para $K_1=1$ siempre que $K > -(5/3)$.
Para que sea estable cuando $K=-1$ debe de cumplirse que:*

$$\begin{aligned}K_1 &> 0 \\-1 &> \frac{K_1}{3} - 2 \Rightarrow (0 < K_1 < 3)\end{aligned}$$

Si $K_1=3$ y $K=-0.5$, el sistema sí es estable ya que se cumplen las condiciones:

$$\begin{aligned}K_1 &> 0 \\K &> \frac{K_1}{3} - 2\end{aligned}$$

73.- Hemos diseñado un sistema de control del nivel del agua para una piscina rectangular de 8 por 5 metros, que está abastecida por una fuente natural. Las pérdidas de agua en la piscina son debidas a diferentes causas, todas ellas despreciables excepto la ocasionada por un desagüe cuya válvula de salida es controlada por un regulador de nivel, cuya función de transferencia es de primer orden con un polo en el origen, un cero en -1 y una constante de proporcionalidad K . Este regulador es activado por una señal de error debida a la diferencia entre la altura de referencia (que es fija) y la salida de un sensor de nivel o célula de presión diferencial cuya respuesta temporal ante entrada escalón tiene la forma mostrada en la figura 9.2.

El comportamiento de la válvula de salida del agua ante una entrada escalón, es la mostrada en la figura 9.3.

Obtener:

a.- Las ecuaciones que modelan cada elemento del sistema.

b.- Las funciones de transferencia asociadas a cada una de estas ecuaciones.

c.- Diagrama de bloques del sistema, donde se observe la correspondencia entre bloques y elementos físicos.

d.- Función de transferencia que relaciona la profundidad del agua en la piscina y el caudal de la fuente, suponiendo que el nivel de referencia es constante.

e.- Análisis de estabilidad del sistema en función de la constante de proporcionalidad K .

f.- Análisis de estabilidad del sistema, suponiendo que el caudal de la fuente es constante, pero no así la altura de referencia.

g.- Si suponemos lineales todas las ecuaciones en el entorno de trabajo, explicar como se comporta el sistema, si la altura de referencia fijada inicialmente para los niños, la fijamos para adultos en un metro por encima de la primera.

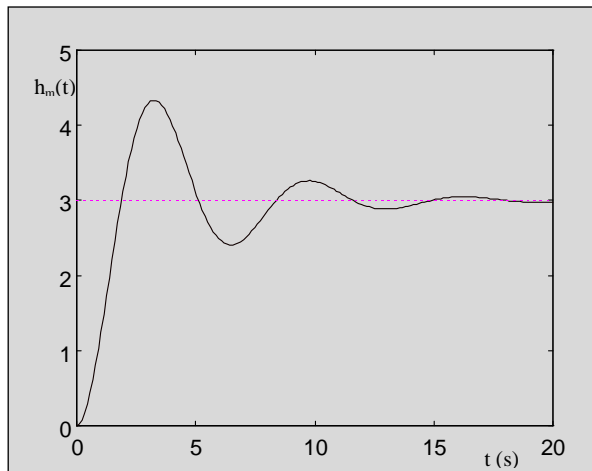


figura 9.2

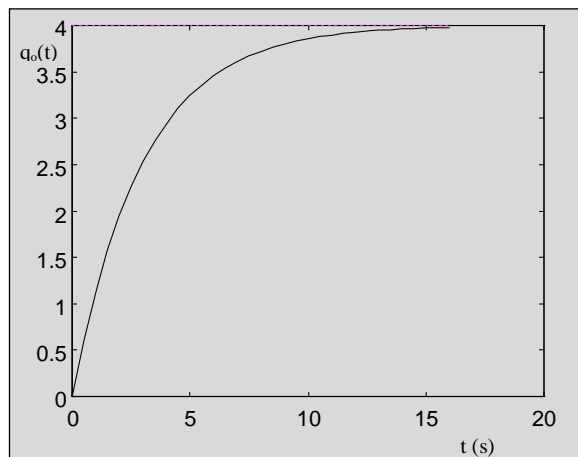


figura 9.3

Solución:

a) Las ecuaciones asociadas a cada uno de los bloques del sistema son:

- Sensor de nivel o célula diferencial (Aplicamos los métodos de identificación que utilizamos en el tema de respuesta temporal):

$$\ddot{h}_m(t) + 0.5 \dot{h}_m(t) + h_m(t) = 3h(t)$$

- Regulador de nivel:

$$\dot{c}(t) = K(\dot{e}(t) + e(t))$$

- Válvula (Aplicamos los métodos de identificación que utilizamos en el tema de respuesta temporal):

$$3\dot{q}_o(t) + q_o(t) = 4c(t)$$

- Proceso:

$$q_i(t) - q_o(t) = A\dot{h}(t)$$

- Señal de error:

$$e(t) = h_r(t) - h_m(t)$$

b) Las funciones de transferencia asociadas a cada uno de los bloques del sistema son:

- Sensor de nivel o célula diferencial:

$$\frac{H_m(s)}{H(s)} = \frac{3}{s^2 + 0.5s + 1}$$

- Regulador de nivel:

$$\frac{C(s)}{E(s)} = K \frac{s+1}{s}$$

- Válvula:

$$\frac{Q_o(s)}{C(s)} = \frac{4}{3s+1}$$

- Proceso:

$$Q_i(s) - Q_o(s) = AsH(s)$$

Automática: problemas resueltos

- Señal de error:

$$E(s) = H_r(s) - H_m(t)$$

c) Desde la figura 9.4 a la figura 9.8 mostramos los diagramas de bloques parciales asociados a cada una de las ecuaciones anteriores.

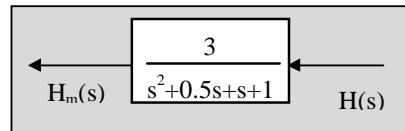


figura 9.4

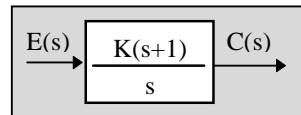


figura 9.5

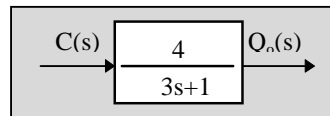


figura 9.6

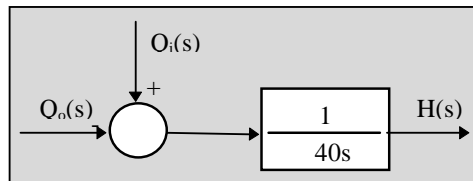


figura 9.7

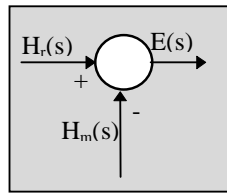


figura 9.8

y al integrarlos todos en un solo diagrama obtenemos el mostrado en la figura 9.9.

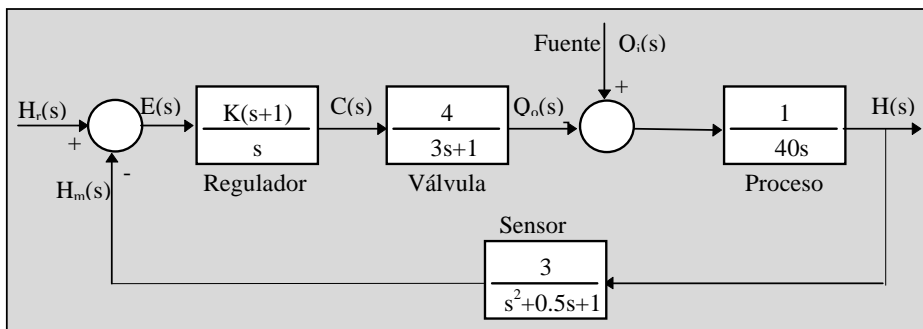


figura 9.9

d) Si el nivel de referencia es constante, el diagrama de bloques correspondiente al sistema es el mostrado en la figura 9.10.

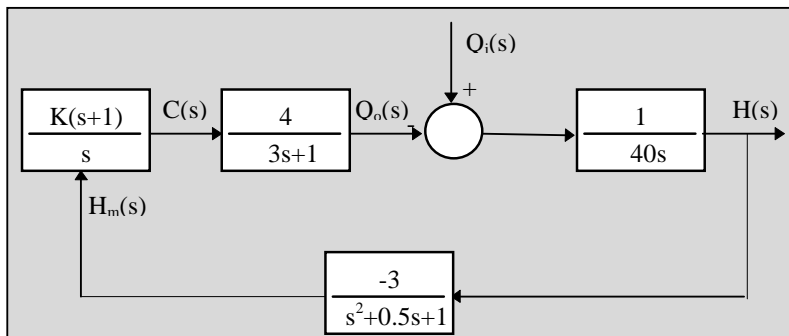


figura 9.10

Simplificando este diagrama de bloques, obtenemos que la función de transferencia del sistema es:

$$\begin{aligned} \frac{H(s)}{Q_i(s)} &= - \frac{\frac{1}{40s}}{1 - \frac{4}{(3s+1)} \frac{K(s+1)}{s} \frac{3}{s^2+0.5s+1} \frac{1}{40s}} = \\ &= - \frac{\frac{1}{40s}}{1 - \frac{12K(s+1)}{40s^2(3s+1)(s^2+0.5s+1)}} = \\ &= - \frac{\frac{1}{40s}}{\frac{40s^2(3s+1)(s^2+0.5s+1) - 12K(s+1)}{40s^2(3s+1)(s^2+0.5s+1)}} = \\ &= - \frac{s(3s+1)(s^2+0.5s+1)}{40s^2(3s+1)(s^2+0.5s+1) - 12K(s+1)} = \\ &= - \frac{3s^4 + 2.5s^3 + 3.5s^2 + s}{120s^5 + 100s^4 + 140s^3 + 40s^2 - 12Ks - 12K} = \frac{H(s)}{Q_i(s)} \end{aligned}$$

e) Si el caudal de la fuente es constante, pero no así la altura de referencia, el diagrama de bloques correspondiente al sistema es el mostrado en la figura 9.11

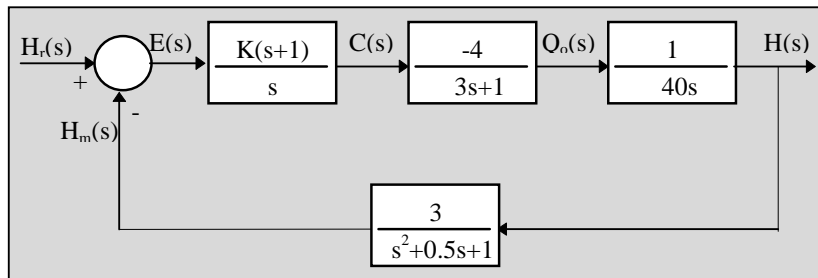


figura 9.11

Simplificando este diagrama de bloques, obtenemos que la función de transferencia del sistema es:

$$\begin{aligned}
 \frac{H(s)}{H_r(s)} &= \frac{\frac{4}{(3s+1)} \frac{K(s+1)}{s} \frac{1}{40s}}{1 - \frac{4}{(3s+1)} \frac{K(s+1)}{s} \frac{3}{(s^2+0.5s+1)} \frac{1}{40s}} = \\
 &= \frac{\frac{4K(s+1)}{40s^2(3s+1)}}{1 - \frac{12K(s+1)}{40s^2(3s+1)(s^2+0.5s+1)}} = \\
 &= \frac{\frac{4K(s+1)}{40s^2(3s+1)}}{\frac{40s^2(3s+1)(s^2+0.5s+1) - 12K(s+1)}{40s^2(3s+1)(s^2+0.5s+1)}} = \\
 &= \frac{4K(s+1)(s^2+0.5s+1)}{40s^2(3s+1)(s^2+0.5s+1) - 12K(s+1)} = \\
 &= \frac{K(4s^3 + 6s^2 + 6s + 4)}{120s^5 + 100s^4 + 140s^3 + 40s^2 - 12Ks - 12K} = \frac{H(s)}{H_r(s)}
 \end{aligned}$$

f) Las dos funciones de transferencia obtenidas en los dos apartados anteriores, tienen la misma ecuación característica, por lo que el análisis de estabilidad será similar para ambas. Realizaremos este análisis de estabilidad utilizando el método de Routh.

Automática: problemas resueltos

$$\begin{array}{r} s^5 \\ s^4 \\ s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \begin{array}{r} 120 \\ 100 \\ 9200 \\ 40 - 0.026K \\ \frac{110496K - 0.0624K^2}{40 - 0.026K} \\ -12K \end{array} \begin{array}{r} 140 \\ 40 \\ 2.4K \\ -12K \end{array} \begin{array}{r} -12K \\ -12K \end{array}$$

Todos los elementos de la segunda columna de la matriz anterior deben de ser positivos para que el sistema sea estable, por lo que podemos afirmar que el sistema no es estable para todos los valores de K positivo.

Como en ambos casos, el sistema es inestable, concluimos que ante una entrada escalón de un metro, el sistema va a producir una salida que diverge.

Tema 10 :

*Análisis por el
método del
lugar de las
raíces*

74.- Analizar, utilizando el método del lugar de las raíces, la estabilidad de los sistemas con realimentación unitaria cuyas funciones de transferencia en bucle abierto son:

$$a) G(s) = \frac{K}{(s^2 + 1)}$$

$$b) G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 1)^2}$$

$$c) G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 1)^2(s^2 + 2)^3}$$

Solución:

$$a) G(s) = \frac{K}{(s^2 + 1)}$$

Para generar el lugar de las raíces utilizando Matlab mediante la función **rlocus** es necesario que la ecuación característica se acople a la forma general dada como:

$$1 + G(s)H(s) \Rightarrow 1 + \frac{Kp(s)}{q(s)} = 0$$

Los pasos para obtener con MATLAB el lugar de las raíces asociado a la ecuación característica:

$$1 + \frac{K}{(s^2 + 1)} = 0$$

son:

```
p=[1];  
q=[1 0 1];  
rlocus(p,q)
```

y el resultado lo mostramos en la figura 10.1, donde podemos observar que para cualquier valor de K , las dos ramas del lugar de las raíces

permanecen sobre el eje imaginario. Esto significa que el sistema de lazo cerrado siempre está en el límite de la estabilidad independientemente de lo que valga K .

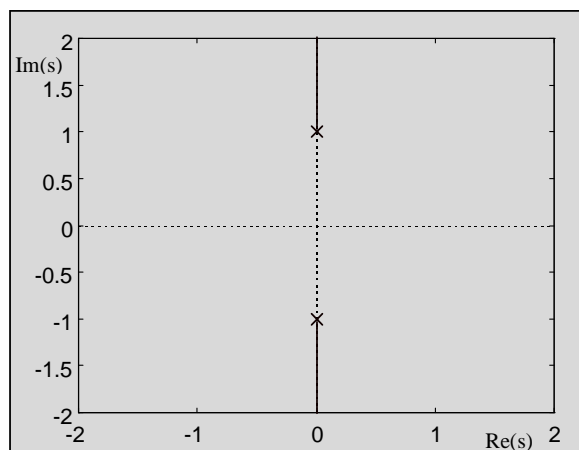


figura 10.1

b)
$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 1)^2}$$

Los pasos para obtener con MATLAB el lugar de las raíces asociado a la ecuación característica:

$$1 + \frac{K}{s(s^2 + 1)^2} = 0$$

son:

```
p=[1];
q=[1 0 2 0 1 0];
rlocus(p,q)
```

y el resultado lo mostramos en la figura 10.2, donde podemos observar que para K distinto de cero, hay dos ramas del lugar de las raíces en el semiplano derecho del plano s , por lo que el sistema de lazo cerrado es inestable para cualquier valor de K .

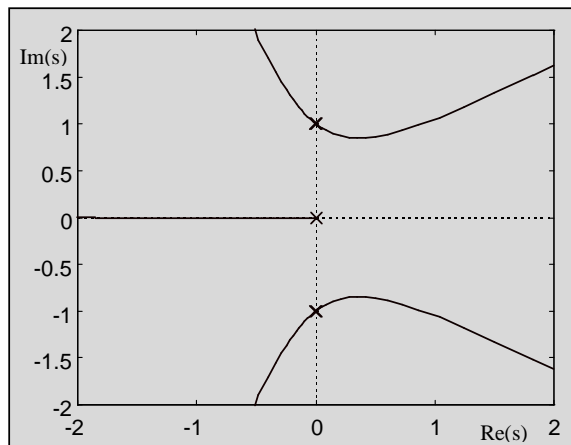


figura 10.2

Si queremos encontrar el valor de K correspondiente a un par de raíces complejas, podemos usar la función **rlocfind** en la forma **rlocfind(p,q)** después de haber usado la función **rlocus**. Ejecutando la función **rlocfind** nos permite marcar con el cursor un punto de la gráfica del lugar de las raíces obteniendo como resultado el valor del parámetro K y el de los polos seleccionados.

Continuando con el caso:

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 1)^2}$$

para $K = 0.71$ la función de transferencia de lazo cerrado tiene cinco polos situados en:

$$s = \begin{pmatrix} 0.43 \pm 0.85j \\ -0.48 \\ -0.19 \pm 1.26j \end{pmatrix}$$

c) $G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 1)^2(s^2 + 2)^3}$

Los pasos para obtener con MATLAB el lugar de las raíces asociado a la ecuación característica:

$$1 + \frac{K}{s(s^2 + 1)^2(s^2 + 2)^3} = 0$$

son:

```
p=[1];
q=conv([1 0],conv(conv([1 0 1],[1 0 1]),conv([1 0 2],conv([1 0 2],[1 0 2]))));
rlocus(p,q)
```

y el resultado lo mostramos en la figura 10.3, donde podemos observar que para K distinto de cero, hay varias ramas del lugar de las raíces en el semiplano derecho del plano s , por lo que el sistema de lazo cerrado es inestable para cualquier valor de K .

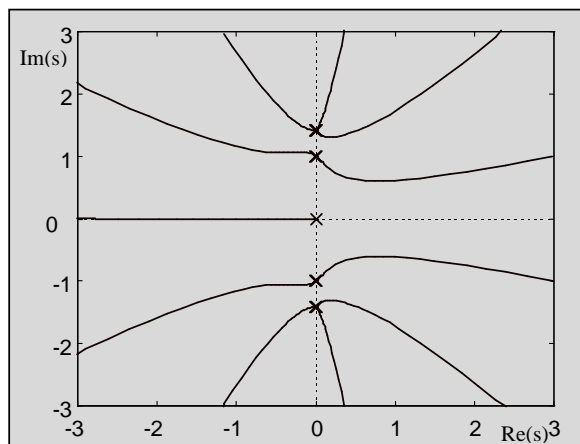


figura 10.3

Si queremos encontrar los polos de la función de transferencia de lazo cerrado cuando $K=5$ podemos usar la función **roots** en la forma **roots(r)** donde **r** es el vector con los coeficientes del denominador de la función de transferencia de lazo cerrado.

Automática: problemas resueltos

```
a=conv([1 0],conv(conv([1 0 1],[1 0 1]),conv([1 0 2],conv([1 0 2],[1 0 2]))));
b=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 5];
roots(a+b)
s=
0.1024 + 1.6964i
0.1024 - 1.6964i
-0.2907 + 1.5876i
-0.2907 - 1.5876i
0.4324 + 1.3719i
0.4324 - 1.3719i
-0.5014 + 1.0582i
-0.5014 - 1.0582i
0.4492 + 0.6393i
0.4492 - 0.6393i
-0.3837
```

75.- Obtener el lugar de las raíces de un sistema con realimentación unitaria y cuya función de transferencia de lazo abierto viene dada por:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

Determinar el valor de la ganancia K para que la relación de amortiguamiento del par de polos complejos conjugados de lazo cerrado sea 0.5.

Solución:

La función de transferencia de lazo abierto del sistema es:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

Para trazar el lugar de las raíces, seguimos el siguiente procedimiento:

1. Los polos de lazo abierto son ($n=3$): $p_1=0$; $p_2=-1$; $p_3=-2$.
2. No tiene ceros de lazo abierto ($m=0$).
3. El intervalo $(-\infty, -2] \cup [-1, 0]$ del eje real, pertenece al lugar de las raíces.
4. El número de asíntotas vendrá dado por $d=n-m=3-0=3$ y sus ángulos los determinamos como:

$$\theta_a = \frac{180^\circ(2k+1)}{n-m} = \begin{cases} 60^\circ \\ -60^\circ \\ 180^\circ \end{cases}$$

y la abscisa de intersección de las asíntotas y el eje real como:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{0-1-2}{3} = -1$$

5. Para determinar los puntos de ruptura, partimos de la ecuación característica:

Automática: problemas resueltos

$$1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

de donde obtenemos:

$$K = -s(s+1)(s+2)$$

derivando K respecto de s e igualando a cero tenemos que:

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 6s + 2) = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s_1 = -1.58; \quad s_2 = -0.42$$

Ambos son candidatos a ser punto de ruptura, pero sólo s_2 está en el lugar de las raíces sobre el eje real, por tanto sólo él lo será.

6. Para determinar el valor de K para el cual el lugar de las raíces cruza el eje imaginario, sustituimos $s = j\omega$ en la ecuación característica, obteniéndose que:

$$j\omega(j\omega + 1)(j\omega + 2) + K = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$\begin{array}{ll} s = 0 & \text{para } K = 0 \\ s = +\sqrt{2}j & \text{para } K = 6 \\ s = -\sqrt{2}j & \text{para } K = 6 \end{array}$$

7. Al no existir polos complejos, no es necesario hallar los ángulos de partida del lugar de las raíces a partir de ellos.

La figura 10.4 muestra el lugar de las raíces para el sistema de partida. Del apartado 6 deducimos que el sistema es estable en el intervalo:

$$K \in [0, 6]$$

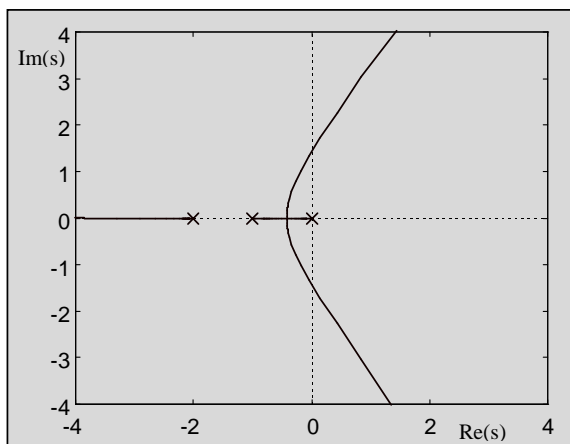


figura 10.4

76.- Obtener el lugar de las raíces de un sistema con realimentación unitaria y función de transferencia de lazo abierto dada por:

$$G(s) = \frac{K}{(s+p)(s^2+20s+101)}$$

con $p=5$.

¿Para qué valores de K el sistema oscila ante una entrada escalón unitario?. Analizar la estabilidad del sistema utilizando el método del lugar de las raíces. Calcular para qué valores de p , el sistema presenta un solo punto de ruptura y un polo triple.

Solución:

La función de transferencia de lazo abierto del sistema con $p=5$ es:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+5)(s^2+20s+101)}$$

Para trazar el lugar de las raíces, seguimos el siguiente procedimiento:

1. Los polos de lazo abierto son ($n=3$): $p_1=-5$; $p_2=-10+j$; $p_3=-10-j$.
2. No tiene ceros de lazo abierto ($m=0$).
3. El intervalo $(-\infty, -5]$ del eje real, pertenece al lugar de las raíces.
4. El número de asíntotas vendrá dado por $d=n-m=3-0=3$, sus ángulos

los determinamos como:

$$\theta_a = \frac{180^\circ(2k+1)}{n-m} = \begin{cases} 60^\circ \\ -60^\circ \\ 180^\circ \end{cases}$$

y la abscisa de intersección de las asíntotas con el eje real como:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{-5-10-10}{3} = -8.3$$

5. Para determinar los puntos de ruptura, partimos de la ecuación característica:

$$1 + \frac{K}{(s+5)(s^2 + 20s + 101)} = 0$$

de donde obtenemos:

$$(s+5)(s^2 + 20s + 101) + K = 0$$

derivando K respecto de s e igualando a cero tenemos que:

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 50s + 201) = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s_1 = -6.77 \quad \text{para} \quad K_1 = 20.29$$

$$s_2 = -9.90 \quad \text{para} \quad K_2 = 4.96$$

Tanto s_1 como s_2 están en el intervalo del eje real perteneciente al lugar de las raíces, por lo que ambos puntos son de ruptura.

6. Para determinar el valor de K para el cual el lugar de las raíces cruza el eje imaginario, sustituimos $s=j\omega$ en la ecuación característica en la forma:

$$(j\omega)^3 + 25(j\omega)^2 + 201j\omega + 505 + K = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$s_1 = 0 \quad \text{para} \quad K = -505$$

$$s_1 = +14.18j \quad \text{para} \quad K = 4520$$

$$s_1 = -14.18j \quad \text{para} \quad K = 4520$$

7. Los ángulos de partida desde los polos complejos, vienen dados por:

$$\theta_{p1} = 180^\circ - 90^\circ - 175^\circ = -78.69^\circ$$

$$\theta_{p2} = 180^\circ - 270^\circ - 185^\circ = 78.69^\circ$$

Del apartado 6 deducimos que el sistema es estable en el intervalo:

$$K \in [0, 4520]$$

y del apartado 5 que el sistema oscila en el intervalo:

$$K \in [0, 4.96] \cup [20.29, \infty]$$

ya que para estos valores el sistema tiene polos complejos conjugados.

La figura 10.5 muestra el lugar de las raíces para el sistema de partida con $p=5$.

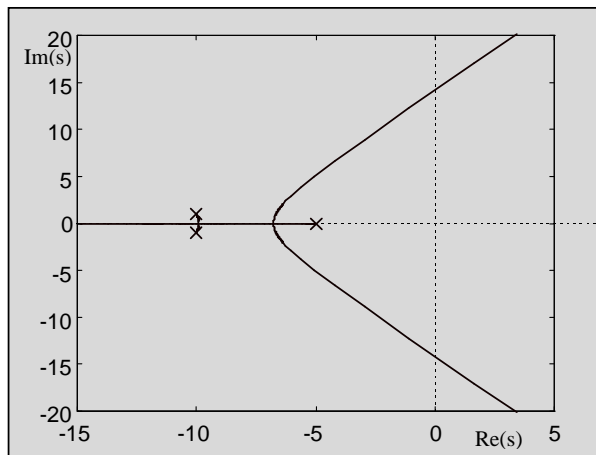


figura 10.5

Para calcular los valores de p para los que el sistema presenta un solo punto de ruptura y un polo triple, partimos de la ecuación característica:

$$1 + \frac{K}{(s+p)(s^2+20s+101)} = 0$$

que equivale a:

$$(s+p)(s^2+20s+101)+K=0$$

Si derivamos K respecto de s , e igualamos a cero, obtenemos una ecuación cuyas soluciones son los puntos candidatos a ser de ruptura:

$$\frac{dK}{ds} = 3s^2 + 2(20+p)s + (101+20p) = 0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones dadas por:

$$s = \frac{-2(20+p) \pm \sqrt{4(20+p)^2 - 12(101+20p)}}{6}$$

y para que ambas soluciones sean iguales debemos cumplir que:

$$4(20+p)^2 - 12(101+20p) = 0$$

por lo que tenemos dos valores de p que permiten tener un único candidato a punto de ruptura:

$$\begin{array}{ll} p_1 = 11.73 & s_1 = -10.6 \\ p_2 = 8.27 & s_2 = -9.42 \end{array}$$

Para p_1 y p_2 los candidatos son respectivamente s_1 y s_2 , pero sólo el segundo es válido, ya que el primero no pertenece al lugar de las raíces del eje real por lo que no puede ser punto de ruptura.

Si $p=p_1$, el diagrama del lugar de las raíces es el mostrado en la figura 10.6 y si $p=p_2$, el de la figura 10.7.

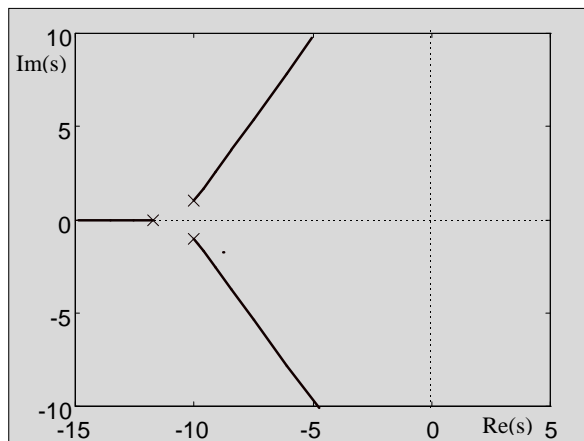


figura 10.6

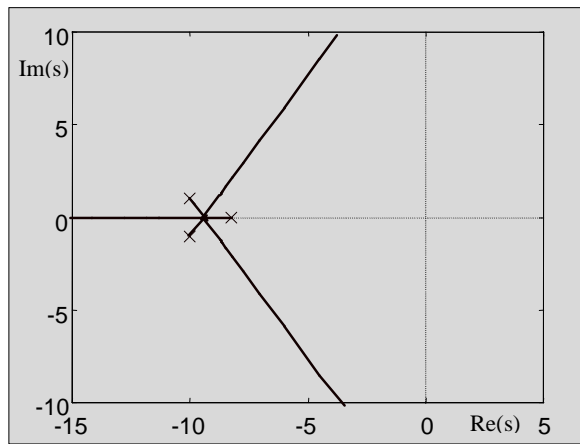


figura 10.7

77.- Obtener de forma detallada el lugar de las raíces de un sistema con realimentación unitaria y función de transferencia de lazo abierto dada por:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s^2 + 2s + a)}$$

para $a=1.81$, $a=2$ y $a=2.21$.

En cada caso, ¿para qué valores de K el sistema oscila ante una entrada escalón?. Analizar la estabilidad del sistema y obtener el período de oscilación del sistema en condición crítica de estabilidad.

Solución:

La función de transferencia de lazo abierto del sistema con $a=1.81$ es:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s^2 + 2s + 1.81)}$$

Para trazar el lugar de las raíces, seguimos el siguiente procedimiento:

1. Los polos de lazo abierto son ($n=4$):

$$p_1=0; p_2=-2; p_3=-1+0.9j; p_4=-1-0.9j$$

2. No tiene ceros de lazo abierto ($m=0$).

3. El intervalo $[-2,0]$ del eje real, pertenece al lugar de las raíces, ya que todos sus puntos dejan a la derecha un número impar de polos más ceros sobre el eje real.

4. El número de asíntotas vendrá dado por $d=n-m=4-0=4$; sus ángulos los determinamos como:

$$\theta_a = \frac{180^\circ(2k+1)}{n-m} = \left\{ \begin{array}{l} 45^\circ \\ -45^\circ \\ 135^\circ \\ -135^\circ \end{array} \right\}$$

La abscisa de intersección de las asíntotas y el eje real la obtenemos como:

Automática: problemas resueltos

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} = \frac{0 - 2 - 1 - 1}{4} = -1$$

5 Para determinar los puntos de ruptura, partimos de la ecuación característica:

$$1 + \frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+1.81)} = 0$$

de donde obtenemos:

$$s(s+2)(s^2+2s+1.81) + K = 0$$

derivando K respecto de s e igualando a cero tenemos que:

$$\frac{dK}{ds} = -(4s^3 + 12s^2 + 11.62s + 3.62) = 0$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned} s_1 &= -1.31 & \text{para } K_1 &= 0.819 \\ s_2 &= -1 & \text{para } K_2 &= 0.81 \\ s_3 &= -0.69 & \text{para } K_3 &= 0.819 \end{aligned}$$

Estos tres valores son puntos de ruptura ya que pertenecen al intervalo del eje real contenido en el lugar de las raíces y que fue calculado en el apartado 3.

6. Para determinar el valor de K para el cual el lugar de las raíces cruza el eje imaginario, sustituimos $s=j\omega$ en la ecuación característica en la forma:

$$j\omega(j\omega+2)((j\omega)^2+2j\omega+1.81) + K = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned} s_4 &= 0 & \text{para } K_4 &= 0 \\ s_5 &= +0.95j & \text{para } K_5 &= 4.43 \\ s_6 &= -0.95j & \text{para } K_6 &= 4.43 \end{aligned}$$

7. Los ángulos de partida del lugar de las raíces a partir de los polos complejos, vienen dados por:

$$\theta_{p_3} = -90^\circ$$

$$\theta_{p_4} = 90^\circ$$

Del apartado 6 deducimos que el sistema es estable en el intervalo:

$$K \in [0, 5.81]$$

y del apartado 5 que el sistema no oscila en el intervalo:

$$K \in [0.810, 0.819]$$

La figura 10.8 muestra el lugar de las raíces para el sistema de partida con $a=1.81$.

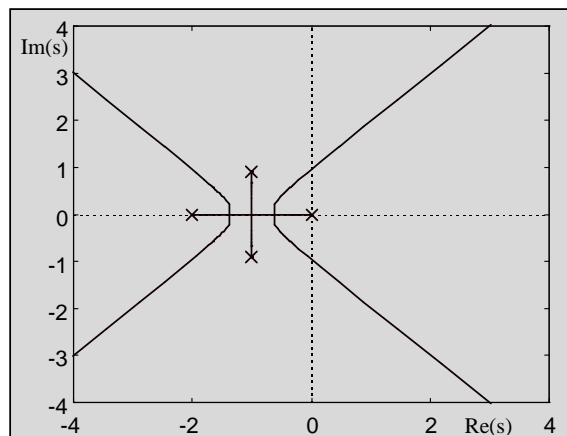


figura 10.8

La función de transferencia de lazo abierto del sistema con $a=2$ es:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

Para trazar el lugar de las raíces, seguimos el siguiente procedimiento:

1. Los polos de lazo abierto son ($n=4$):
 $p_1=0$; $p_2=-2$; $p_3=-1+j$; $p_4=-1-j$.

Automática: problemas resueltos

2. No tiene ceros de lazo abierto ($m=0$).

3. El intervalo $[-2,0]$ del eje real, pertenece al lugar de las raíces.

4. El número de asíntotas vendrá dado por $d=4-0=4$, sus ángulos los determinamos como:

$$\theta_a = \frac{180^\circ(2k+1)}{n-m} = \left\{ \begin{array}{l} 45^\circ \\ -45^\circ \\ 135^\circ \\ -135^\circ \end{array} \right\}; k=0,1,2,\dots$$

y la abscisa de intersección de las asíntotas y el eje real como:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{0-2-1-1}{4} = -1$$

5. Para determinar los puntos de ruptura, partimos de la ecuación característica:

$$1 + \frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)} = 0$$

de donde obtenemos:

$$s(s+2)(s^2+2s+2) + K = 0$$

derivando K respecto de s e igualando a cero tenemos que:

$$\frac{dK}{ds} = -(4s^3 + 12s^2 + 12s + 4) = 0$$

cuya solución de multiplicidad tres es:

$$s = -1 \quad \text{para} \quad K = 1$$

Este valor es punto de ruptura, de multiplicidad tres, ya que pertenece al intervalo del eje real contenido en el lugar de las raíces calculado en el apartado 3.

6. Para determinar el valor de K para el cual el lugar de las raíces cruza el eje imaginario, sustituimos $s=j\omega$ en la ecuación característica de la forma:

$$j\omega(j\omega + 2)((j\omega)^2 + 2j\omega + 2) + K = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$s_1 = 0 \quad \text{para } K_1 = 0$$

$$s_2 = j \quad \text{para } K_2 = 5$$

$$s_3 = -j \quad \text{para } K_3 = 5$$

7. Los ángulos de partida del lugar de las raíces a partir de los polos complejos, vienen dados por:

$$\theta_{p_3} = 180^\circ - 135^\circ - 45^\circ - 90^\circ = -90^\circ$$

$$\theta_{p_4} = 180^\circ + 90^\circ + 135^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

Del apartado 6 deducimos que el sistema es estable en el intervalo:

$$K \in [0,5]$$

y del apartado 5 que el sistema no oscila cuando:

$$K = 1$$

La figura 10.9 muestra el lugar de las raíces para el sistema de partida con $a=2$.

La función de transferencia de lazo abierto del sistema con $a=2.21$ es:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s^2 + 2s + 2.21)}$$

Para trazar el lugar de las raíces, seguimos el siguiente procedimiento:

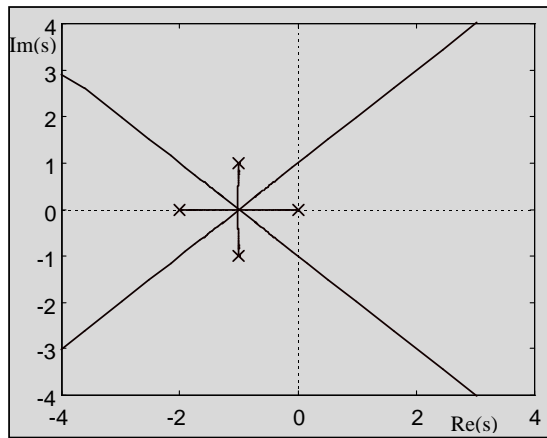


figura 10.9

1. Los polos de lazo abierto son ($n=4$):

$$p_1=0; p_2=-2; p_3=-1+1.1j; p_4=-1-1.1j$$

2. No tiene ceros de lazo abierto ($m=0$).

3. El intervalo $[-2,0]$ del eje real, pertenece al lugar de las raíces.

4. El número de asíntotas vendrá dado por $d=n-m=4-0=4$, sus ángulos los determinamos como:

$$\theta_a = \frac{180^\circ(2k+1)}{n-m} = \begin{cases} 45^\circ \\ -45^\circ \\ 135^\circ \\ -135^\circ \end{cases}; k=0,1,2,\dots$$

y la abscisa de intersección de las asíntotas y el eje real como:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{0-2-1-1}{4} = -1$$

5. Para determinar los puntos de ruptura, partimos de la ecuación característica:

$$1 + \frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2.21)} = 0$$

de donde obtenemos:

$$s(s+2)(s^2+2s+2.21) + K = 0$$

derivando K respecto de s e igualando a cero tenemos que

$$\frac{dK}{ds} = -(4s^3 + 12s^2 + 12.42s + 4.42) = 0$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned} s_1 &= -1 && \text{para } K_1 = 1.21 \\ s_2 &= -1 + 0.324j && \text{para } K_2 = 1.221 \\ s &= -1 - 0.324j && \text{para } K_3 = 1.221 \end{aligned}$$

Estos tres valores son puntos de ruptura ya que cumplen la condición de fase:

$$\angle \frac{1}{s^4 + 4s^3 + 6.21s^2 + 4.42s} = \pm 180(2k+1); \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\angle \frac{1}{s^4 + 4s^3 + 6.21s^2 + 4.42s} \Big|_{s=s_1} = \angle -0.826 = \pm 180(2k+1); \quad k = 0$$

$$\angle \frac{1}{s^4 + 4s^3 + 6.21s^2 + 4.42s} \Big|_{s=s_2} = \angle -0.819 = \pm 180(2k+1); \quad k = 0$$

$$\angle \frac{1}{s^4 + 4s^3 + 6.21s^2 + 4.42s} \Big|_{s=s_3} = \angle -0.819 = \pm 180(2k+1); \quad k = 0$$

6. Para determinar el valor de K para el cual el lugar de las raíces cruza el eje imaginario, sustituimos $s=j\omega$ en la ecuación característica de la forma:

$$j\omega(j\omega+2)((j\omega)^2+2j\omega+2.21) + K = 0$$

Automática: problemas resueltos

cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned} s_1 &= 0 && \text{para } K_1 = 0 \\ s_2 &= 1.05j && \text{para } K_2 = 5.63 \\ s_3 &= -1.05j && \text{para } K_3 = 5.63 \end{aligned}$$

7. Los ángulos de partida del lugar de las raíces a partir de los polos complejos, viene dado por:

$$\begin{aligned} \theta_{p_3} &= -90^\circ \\ \theta_{p_4} &= 90^\circ \end{aligned}$$

Del apartado 6 deducimos que el sistema es estable en el intervalo

$$K \in [0, 5.63]$$

y del apartado 5 que el sistema siempre oscila.

La figura 10.10 muestra el lugar de las raíces para el sistema de partida con $a=2.21$.

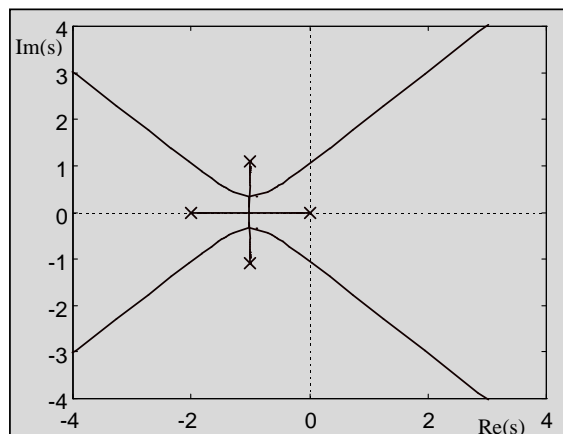


figura 10.10

78.- Sea un sistema con realimentación unitaria cuya función de transferencia de lazo abierto es:

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 0.7s + 1600)}{s(s + 160)(s + 2)}$$

Obtener el lugar de las raíces y analizar la estabilidad del sistema analíticamente y utilizando Matlab.

Solución:

La función de transferencia de lazo abierto del sistema es:

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 0.7s + 1600)}{s(s + 160)(s + 2)}$$

Para trazar el lugar de las raíces, seguimos el siguiente procedimiento:

1. Los polos de lazo abierto son ($n=3$): $p_1=0$; $p_2=-160$; $p_3=-2$.
2. Los ceros de lazo abierto son ($m=2$): $z_1=-0.35+40j$; $z_2=-0.35-40j$.
3. El intervalo $(-\infty, -160] \cup [-2, 0]$ del eje real, pertenece al lugar de las raíces, ya que todos sus puntos tienen a la derecha un número impar de polos más ceros.
4. El número de asíntotas vendrá dado por $d=n-m=3-2=1$, y su ángulo lo determinamos como:

$$\theta_a = \frac{180^\circ (2k + 1)}{n - m} = 180^\circ$$

5. Para determinar los puntos de ruptura, partimos de la ecuación característica:

$$1 + \frac{K(s^2 + 0.7s + 1600)}{s(s + 160)(s + 2)} = 0$$

de donde obtenemos:

$$s(s + 160)(s + 2) + K(s^2 + 0.7s + 1600) = 0 \Rightarrow K = -\frac{s(s + 160)(s + 2)}{(s^2 + 0.7s + 1600)}$$

Automática: problemas resueltos

Si derivamos K respecto de s e igualamos a cero tenemos cuatro puntos candidatos para ser puntos de ruptura

$$s_1 = -107 \quad s_2 = -1 \quad s_3 = 30.5 + 86.1j \quad s_4 = 30.5 - 86.1j$$

El punto s_2 está en el lugar de las raíces del eje real calculado en el apartado 3, por tanto será punto de ruptura. Ninguno de los otros tres candidatos cumplen la condición de fase, que es requisito indispensable para ser punto de ruptura.

6. El valor de K para el cual el lugar de las raíces cruza el eje imaginario lo determinamos sustituyendo $s = j\omega$ en la ecuación característica de la forma:

$$j\omega(j\omega + 160)(j\omega + 2) + K((j\omega)^2 + 0.7j\omega + 1600) = 0$$

de donde:

$$(j\omega)^3 + (162 + K)(j\omega)^2 + (320 + 0.7K)(j\omega) + 1600K = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (320 + 0.7K)\omega - \omega^3 = 0 \\ 1600K - (162 + K)\omega^2 = 0 \end{array} \right.$$

Cuyas soluciones son:

$$\begin{array}{ll} \omega_1 = 0 & \text{para } K_1 = 0 \\ \omega_2 = 18.8 & \text{para } K_2 = 46 \\ \omega_3 = 38 & \text{para } K_3 = 1621 \end{array}$$

7. Los ángulos de llegada del lugar de las raíces a los ceros complejos conjugados vienen dados por la expresión:

$$\psi_i = 180^\circ - \sum_{k \neq i} \psi_k + \sum_j \theta_j.$$

Por lo que:

$$\psi_{-0.35+40j} = 180^\circ - 90^\circ + 14^\circ + 87.6^\circ + 90.5^\circ = 282.1^\circ.$$

Y por simetría:

$$\psi_{-0.35-40j} = 77.9^\circ.$$

La figura 10.11 muestra el lugar de las raíces para el sistema de partida. Del apartado 6 deducimos que el sistema no es estable en el intervalo:

$$K \in [46,1621]$$

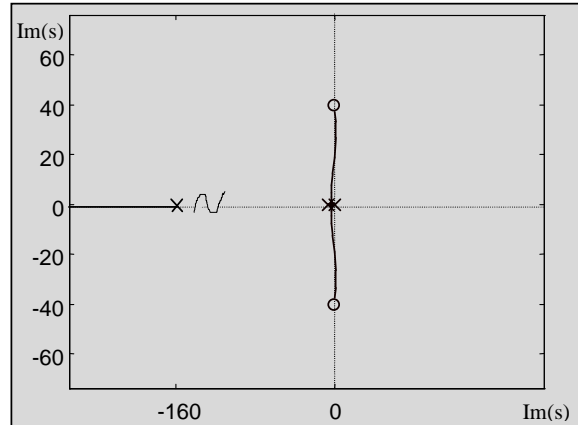


figura 10.11

Para generar el lugar de las raíces con la función **rlocus** es necesario que la ecuación característica se acople a la forma general dada como:

$$1 + \frac{Kp(s)}{q(s)} = 0$$

Los pasos para obtener con MATLAB el lugar de las raíces asociado a la ecuación característica:

$$1 + \frac{K(s^2 + 0.7s + 1600)}{s(s + 160)(s + 2)} = 0$$

son:

Automática: problemas resueltos

```
p=[1 0.7 1600];  
q=conv([1 0],conv([1 160],[1 2]));  
rlocus(p,q)  
axis([-165 5 -50 50])
```

y el resultado lo mostramos en la figura 10.11, donde podemos observar que existen dos ramas que cortan al eje imaginario en dos puntos cada una, produciéndose por ello un intervalo de inestabilidad que obtendremos utilizando en dos ocasiones la función **rlocfind** de la siguiente forma:

```
p=[1 0.7 1600];  
q=conv([1 0],conv([1 160],[1 2]));  
rlocus(p,q)  
axis([-165 5 -50 50])  
zoom  
rlocfind(p,q)  
rlocfind(p,q)
```

y el intervalo de inestabilidad corresponde a:

$$K \in [46, 1621]$$

79.- Analizar utilizando el método del lugar de las raíces la estabilidad del sistema de realimentación unitaria cuya función de transferencia de lazo abierto es:

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+160)(s+2)}$$

Obtener el lugar de las raíces y analizar la estabilidad del sistema.

Solución:

La función de transferencia de lazo abierto del sistema es:

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+160)(s+2)}$$

Para trazar el lugar de las raíces, seguimos el siguiente procedimiento:

1. Los polos de lazo abierto son ($n=3$): $p_1=0$; $p_2=-160$; $p_3=-2$
2. El cero de lazo abierto es ($m=1$): $z_1=-1$
3. El intervalo $[-160,-2] \cup [-1,0]$ del eje real, pertenece al lugar de las raíces, ya que todos sus puntos tienen a la derecha un número impar de polos más ceros.
4. El número de asíntotas vendrá dado por $d=n-m=3-1=2$, y sus ángulos los determinamos como:

$$\theta_a = \frac{180^\circ (2k+1)}{n-m} = \pm 90^\circ$$

5. Para determinar los puntos de ruptura, partimos de la ecuación característica:

$$1 + \frac{K(s+1)}{s(s+160)(s+2)} = 0$$

de donde obtenemos:

$$s(s+160)(s+2) + K(s+1) = 0 \Rightarrow K = -\frac{s(s+160)(s+2)}{(s+1)}$$

Automática: problemas resueltos

Si derivamos K respecto de s e igualamos a cero tenemos tres puntos candidatos para ser puntos de ruptura:

$$s_1 = -80.51 \quad s_2 = -1 + j \quad s_3 = -1 - j$$

El punto s_1 está en el lugar de las raíces del eje real obtenido en el apartado 3, y ninguno de los otros dos puntos candidatos a ser de ruptura cumplen la condición de fase, que es requisito indispensable para serlo, por tanto sólo s_1 será punto de ruptura.

6. Para determinar el valor de K para el cual el lugar de las raíces cruza el eje imaginario, sustituimos $s = j\omega$ en la ecuación característica en la forma:

$$j\omega(j\omega + 160)(j\omega + 2) + K(j\omega + 1) = 0$$

de donde:

$$(j\omega)^3 + 162(j\omega)^2 + (320 + K)(j\omega) + K = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (320 + K)\omega - \omega^3 = 0 \\ K - 162\omega^2 = 0 \end{array} \right\}$$

La única solución real es (las otras soluciones corresponden a valores de ω complejos):

$$\omega = 0 \quad \text{para} \quad K = 0$$

La figura 10.12 muestra el lugar de las raíces para el sistema de partida. Del apartado 6 deducimos que el sistema es estable para todos los valores de K positivos.

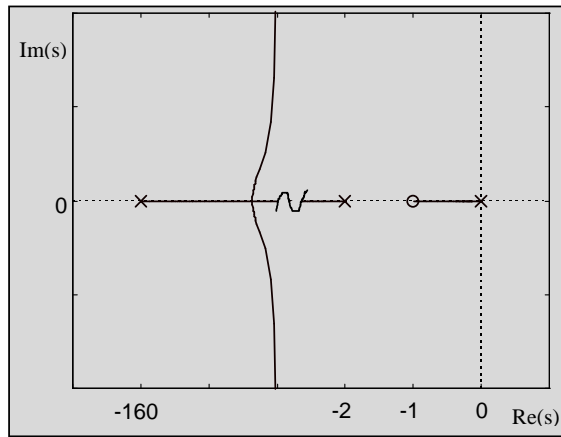


figura 10.12

80.- Analizar, utilizando el método del lugar de las raíces, la estabilidad del sistema cuya función de transferencia en bucle abierto es:

$$G(s) = \frac{K(s + 1.326)}{(s + 10)(s + 1)(s + 0.5)}$$

Encontrar el rango de valores de $k > 0$ en el que el sistema realimentado no presenta oscilaciones ante una entrada escalón.

Solución:

Para generar el lugar de las raíces con la función **rlocus** es necesario que la ecuación característica se acople a la forma general dada como:

$$1 + \frac{Kp(s)}{q(s)} = 0$$

Los sentencias para obtener con **MATLAB** el lugar de las raíces asociado a la ecuación característica:

$$1 + \frac{K(s + 1.326)}{(s + 10)(s + 1)(s + 0.5)} = 0$$

son:

```
p=[1 1.326];  
q=conv([1 0.5],conv([1 10],[1 1]));  
rlocus(p,q)  
axis([-11 0 -3 3]);
```

y el resultado lo mostramos en la figura 10.13, donde podemos observar que para cualquier valor de K las distintas ramas del lugar de las raíces permanecen en el semiplano izquierdo del plano s , por lo que el sistema de lazo cerrado es estable para cualquier valor de K .

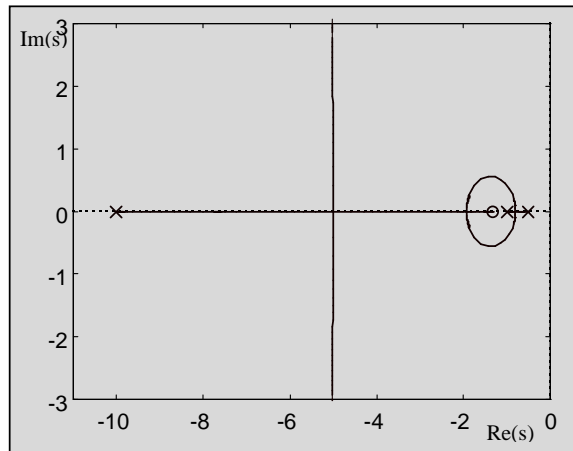


figura 10.13

Para encontrar el rango de valores de $k > 0$ donde el sistema realimentado no presenta oscilaciones ante una entrada escalón hay que obtener el valor de K para los tres puntos de ruptura. Para ello, podemos usar repetidamente la función **rlocfind** en la forma:

```
p=[1 1.326];
q=conv([1 0.5],conv([1 10],[1 1]));
rlocus(p,q)
axis([-11 0 -3 3]);
rlocfind(p,q)
rlocfind(p,q)
rlocfind(p,q)
```

El intervalo buscado se corresponde con:

$$K \in [1.05, 17.77] \cup [24.49, +\infty)$$

donde aparecen polos complejos conjugados y por tanto el sistema oscila.

81.- Un sistema de realimentación unitaria tiene por función de transferencia en lazo abierto

$$G(s) = \frac{K(1 + 0.1s)}{s^2 - 1}$$

Obtener su diagrama del lugar de las raíces y analizar la estabilidad.

Si para eliminar el error de posición, introducimos una red correctora de tipo integral cuya función de transferencia es $G_i(s)=10/s$. Obtener el nuevo diagrama del lugar de las raíces y ver la influencia en la estabilidad del sistema.

Solución:

Para trazar el lugar de las raíces, seguimos el siguiente procedimiento:

1. Los polos de lazo abierto son ($n=2$): $p_1=+1$; $p_2=-1$.
2. El cero de lazo abierto es ($m=1$): $z_1=-10$.
3. El intervalo $(-\infty, -10] \cup [-1, 1]$ del eje real pertenece al lugar de las raíces.
4. El número de asíntotas vendrá dado por $d=n-m=2-1=1$, y su ángulo lo determinamos como:

$$\theta_a = \frac{180^\circ(2k+1)}{n-m} = -180^\circ; k=0,1,2,\dots$$

5. Para obtener los puntos de ruptura, partimos de la ecuación característica:

$$1 + G(s) = 1 + \frac{K(1 + 0.1s)}{s^2 - 1} = 0$$

de donde obtenemos:

$$s^2 + 0.1Ks + K - 1 = 0 \Rightarrow K = \frac{1 - s^2}{0.1s + 1}$$

derivando K respecto de s e igualando a cero tenemos que:

$$\frac{dK}{ds} = -(0.1s^2 + 2s + 0.1) = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s_1 = -19.95 \quad \text{para } K_1 = 399$$

$$s_2 = -0.05 \quad \text{para } K_2 = 1$$

Estos dos valores son puntos de ruptura ya que, según el punto 3, pertenecen al lugar de las raíces.

6. Para determinar el valor de K para el cual el lugar de las raíces cruza el eje imaginario, sustituimos $s=j\omega$ en la ecuación característica en la forma:

$$(j\omega)^2 + 0.1Kj\omega + K - 1 = 0$$

La solución es:

$$\omega = 0 \quad \text{para } K = 1$$

La figura 10.14 muestra el lugar de las raíces para el sistema de partida. Del apartado 6 deducimos que el sistema es estable para:

$$K \in [1, \infty]$$

Si introducimos una red correctora $G_i(s)=10/s$, el nuevo diagrama del lugar de las raíces lo obtenemos con el siguiente procedimiento:

1. Los polos de lazo abierto son ($n=3$): $p_1=+1$; $p_2=-1$; $p_3=0$.
2. El cero de lazo abierto es ($m=1$): $z_1=-10$.
3. El intervalo $[-10,-1] \cup [0,1]$ del eje real, pertenece al lugar de las raíces.
4. El número de asíntotas viene dado por $d=n-m=3-1=2$, y sus ángulos los calculamos como:

$$\theta_a = \mp \frac{180^\circ(2k+1)}{n-m} = \pm 90^\circ$$

5. Para determinar los puntos de ruptura, partimos de la ecuación característica:

Automática: problemas resueltos

$$1 + G_r(s) = 1 + \frac{K10(1 + 0.1s)}{s(s^2 - 1)} = 0$$

de donde obtenemos:

$$s^3 - s + 10K + Ks = 0 \Rightarrow K = \frac{s - s^3}{10 + s}$$

derivando K respecto de s e igualando a cero tenemos que:

$$\frac{dK}{ds} = 0 \Rightarrow -(2s^3 + 30s^2 - 10) = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s_1 = -15$$

$$s_2 = -0.6$$

$$s_3 = 0.6$$

De estos tres valores, sólo s_3 es punto de ruptura ya que ni s_1 ni s_2 , según lo obtenido en el punto 3, pertenecen al lugar de las raíces. El valor de K asociado a s_3 lo calculamos con la ecuación característica.

6. Para determinar el valor de K para el cual el lugar de las raíces cruza el eje imaginario, sustituimos $s=j\omega$ en la ecuación característica en la forma:

$$(j\omega)^3 - j\omega + 10K + Kj\omega = 0$$

y su solución es:

$$s = 0 \quad \text{para} \quad K = 0$$

La figura 10.15 muestra el lugar de las raíces para el sistema de partida. Del apartado 6 deducimos que el sistema es inestable para cualquier valor de K , por lo que es inestable para $K=100$.

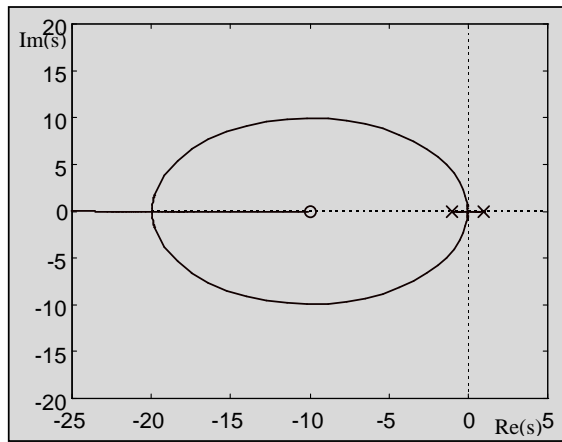


figura 10.14

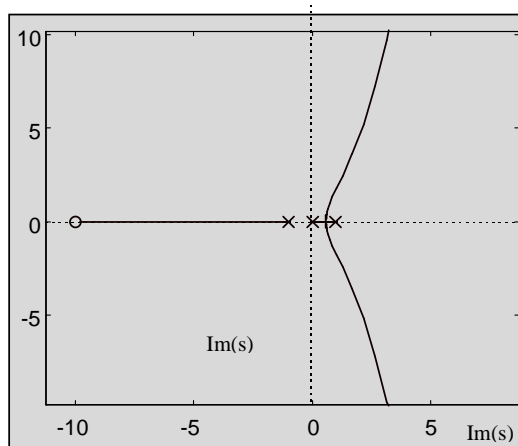


figura 10.15

Tema 11 :

Diagramas de Bode

82.- Trazar los diagramas de Bode de las siguientes funciones de transferencia de lazo abierto:

$$a) G(s) = \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}; \quad T_1 = 10T_2 > 0$$

$$b) G(s) = \frac{T_1 s - 1}{T_2 s + 1}; \quad T_1 = 10T_2 > 0$$

$$c) G(s) = \frac{1 - T_1 s}{T_2 s + 1}; \quad T_1 = 10T_2 > 0$$

Solución:

a) Inicialmente desarrollamos $G(j\omega)$ en forma normalizada:

$$G(j\omega) = \frac{T_1 j\omega + 1}{T_2 j\omega + 1}; \quad T_1 = 10T_2 > 0$$

Esta función está compuesta por los siguientes factores:

$$T_1 j\omega + 1 \quad (T_2 j\omega + 1)^{-1}$$

Las frecuencias de cruce de estos dos términos son, respectivamente:

$$\omega_1 = 1/T_1 \quad \omega_2 = 1/T_2$$

Los diagramas de Bode de magnitud y fase del primer y segundo términos son los mostrados en la figura 11.1 y figura 11.2, respectivamente.

Si sumamos las dos gráficas de magnitud y las dos de fase, teniendo en cuenta que $T_1=10T_2$, obtenemos el diagrama de Bode de la función de transferencia de partida que es el mostrado en la figura 11.3.

b) Inicialmente desarrollamos $G(j\omega)$ en forma normalizada:

$$G(j\omega) = \frac{T_1 j\omega - 1}{T_2 j\omega + 1}; \quad T_1 = 10T_2 > 0$$

Esta función está compuesta por los siguientes factores:

$$T_1 j\omega - 1 \quad (T_2 j\omega + 1)^{-1}$$

Automática: problemas resueltos

Las frecuencias de cruce de los dos términos, son respectivamente:

$$\omega = 1/T_1 \qquad \omega = 1/T_2$$

Los diagramas de Bode de magnitud y fase del primer y segundo término son los mostrados en la figura 11.4 y figura 11.2 respectivamente.

Si sumamos las dos gráficas de magnitud y las dos de fase, obtenemos el diagrama de Bode de la función de transferencia de partida que es el mostrado en la figura 11.5.

c) Inicialmente desarrollamos $G(j\omega)$ en forma normalizada:

$$G(j\omega) = \frac{1 - T_1 j\omega}{T_2 j\omega + 1}; \quad T_1 = 10T_2 \succ 0$$

Esta función está compuesta por los siguientes factores:

$$1 - T_1 j\omega \qquad (T_2 j\omega + 1)^{-1}$$

La frecuencia de cruce de los dos términos son, respectivamente:

$$\omega = 1/T_1 \qquad \omega = 1/T_2$$

El diagrama de Bode de magnitud y fase del primer y segundo término son los mostrados en la figura 11.6 y figura 11.2, respectivamente.

Si sumamos las dos gráficas de magnitud y las dos de fase, obtenemos el diagrama de Bode de la función de transferencia de partida que es el mostrado en la figura 11.7.

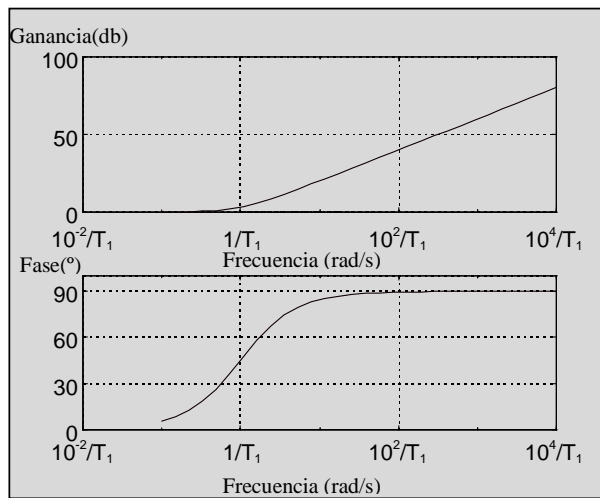


figura 11.1

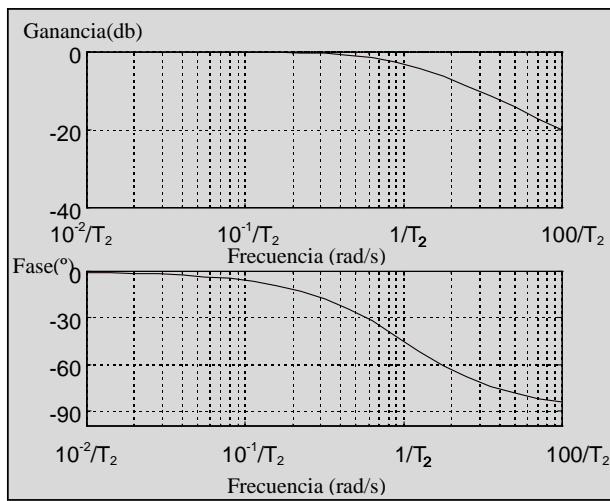


figura 11.2

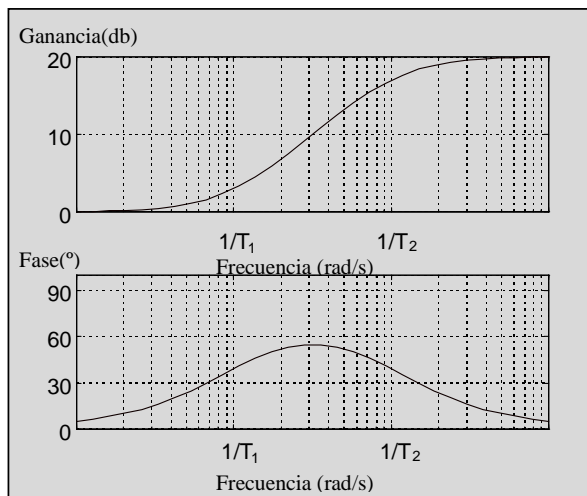


figura 11.3

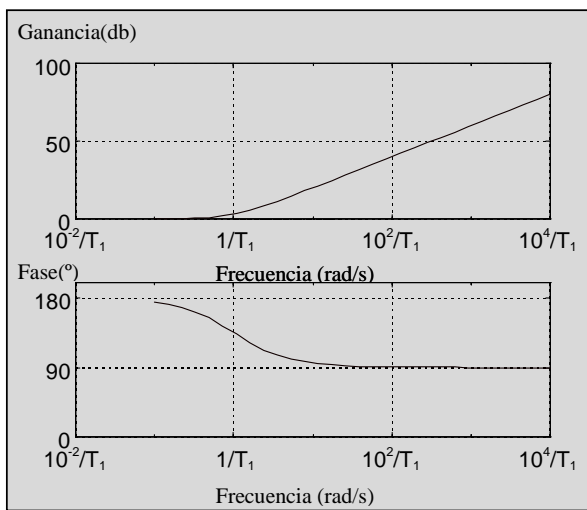


figura 11.4

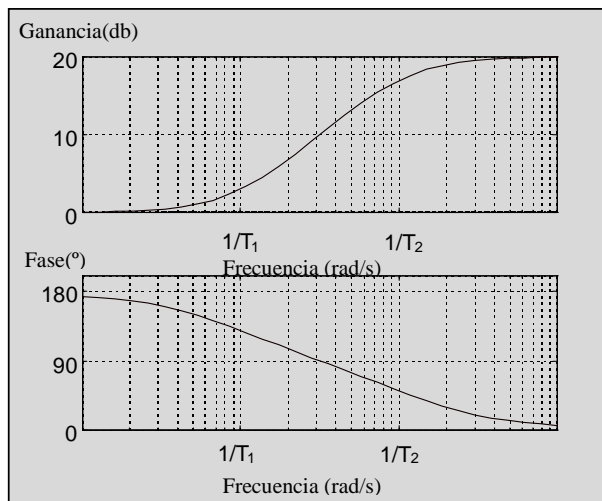


figura 11.5

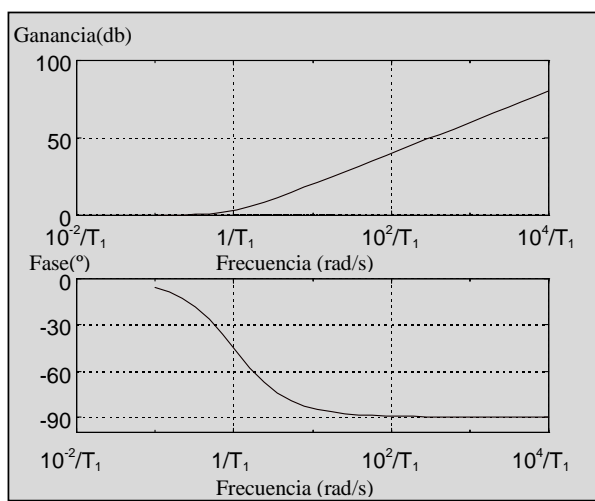


figura 11.6

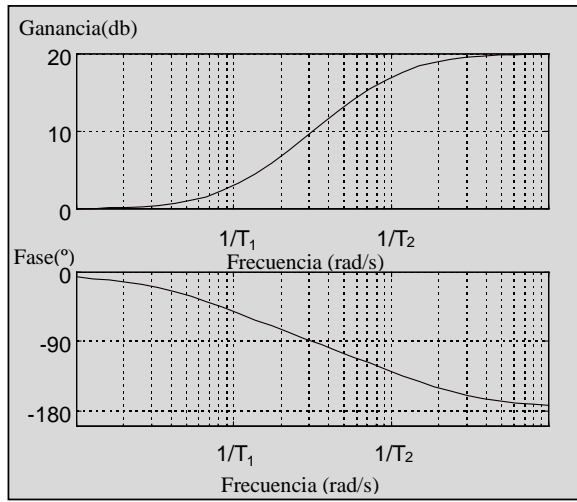


figura 11.7

83.- Considerar el sistema de control con realimentación unitaria cuya función de transferencia de lazo abierto es

$$G(s) = \frac{as + 1}{s^2}$$

Determinar el valor de a tal que el margen de fase sea 45° .

Solución:

Para estudiar la respuesta en frecuencias del sistema, debemos analizar la función $G(j\omega)$ que toma la forma:

$$G(j\omega) = \frac{aj\omega + 1}{(j\omega)^2}$$

Según la definición del margen de fase, a la frecuencia ω_1 en la que lo medimos, debe de cumplirse que la magnitud de la función de transferencia sea uno, y la fase $-180^\circ + 45^\circ = -135^\circ$ es decir:

$$|G(j\omega_1)| = \frac{\sqrt{a^2\omega_1^2 + 1}}{\omega_1^2} = 1$$

$$\angle G(j\omega_1) = -180^\circ + \arctg(\omega_1 a) = 45^\circ - 180^\circ = -135^\circ$$

La solución de este sistema de ecuaciones con dos incógnitas es:

$$a = 0.84$$

$$\omega_1 = 1.19 \text{ rad/s.}$$

El diagrama de Bode del sistema es el mostrado en la figura 11.8.

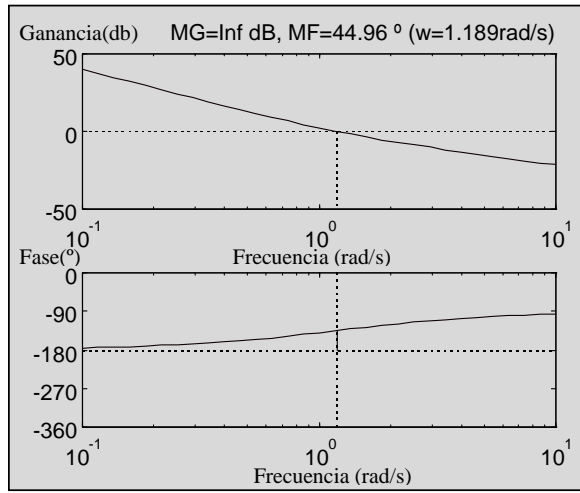


figura 11.8

84.- Determinar el valor de K tal que el margen de fase sea 50° para un sistema cuya función de transferencia de lazo abierto es:

$$G(s) = \frac{0.25K}{s(0.25s^2 + 0.25s + 1)}$$

¿Cuál es el margen de ganancia para este caso?.

Solución:

Para estudiar la respuesta en frecuencias del sistema, debemos analizar la función $G(j\omega)$ que toma la forma:

$$G(j\omega) = \frac{0.25K}{j\omega(0.25(j\omega)^2 + 0.25j\omega + 1)}$$

Según la definición del margen de fase, a la frecuencia que lo medimos debe de cumplirse que la magnitud de la función de transferencia sea uno, y la fase $-180^\circ + 50^\circ = -130^\circ$ es decir:

$$\angle G(j\omega_1) = -90^\circ - \arctg\left(\frac{0.25\omega_1}{1 - 0.25\omega_1^2}\right) = -130^\circ$$

Cuya solución es :

$$\omega_1 = 1.49 \text{ rad/s.}$$

Por tanto en $\omega_1 = 1.49 \text{ rad/s}$ la fase es -130° y el módulo de $G(j\omega)$ es la unidad de donde deducimos que:

$$|G(j1.49)| = \left| \frac{0.25K}{j1.49(0.25(j1.49)^2 + 0.25j1.49 + 1)} \right| = 0.29K = 1 \Rightarrow K = 3.46$$

Para obtener el margen de ganancia, debemos calcular la frecuencia para la cual la fase es -180° y para ella calcular la ganancia.

De la ecuación:

Automática: problemas resueltos

$$\angle G(j\omega_2) = -90^\circ - \arctg\left(\frac{0.25\omega_2}{1 - 0.25\omega_2^2}\right) = -180^\circ$$

obtenemos que:

$$\omega_2 = 2 \text{ rad/s.}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} |G(j\omega_2)| = 0.865 & \Rightarrow 20 \log |G(j\omega_2)| = -1,26 \\ MG = 1.26 \text{ db} \end{aligned}$$

85.- Obtener los diagramas de Bode en magnitud y fase de un sistema con realimentación unitaria y cuya función de transferencia en lazo abierto es:

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 2s + 4)}{(s^2 + 1.4s + 1)(s + 4)(s + 6)s}; K = 1$$

Analizar la estabilidad del sistema, teniendo como único criterio de estabilidad que el margen de fase sea positivo. Calcular gráficamente los valores de la ganancia K para que el sistema con realimentación unitaria y función de transferencia de lazo abierto $KG(s)$ sea inestable, basándonos en el mismo criterio de estabilidad.

Nota: Suponer que los cortes del diagrama de fase con -180° están en las siguientes frecuencias: $\omega_1=1.3$ rad/s; $\omega_2=2.2$ rad/s; $\omega_3=3.8$ rad/s.

Solución:

Inicialmente desarrollamos $G(j\omega)$ en forma normalizada:

$$G(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + 2j\omega + 4}{((j\omega)^2 + 1.4j\omega + 1)(j\omega + 4)(j\omega + 6)j\omega} =$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \left(\frac{(j\omega)^2}{4} + \frac{j\omega}{2} + 1 \right)}{((j\omega)^2 + 1.4j\omega + 1) \left(\frac{j\omega}{4} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{6} + 1 \right) j\omega}$$

Esta función está compuesta por los siguientes factores:

$$\left(\frac{(j\omega)^2}{4} + \frac{j\omega}{2} + 1 \right) \quad ((j\omega)^2 + 1.4j\omega + 1)^{-1} \quad \left(\frac{j\omega}{4} + 1 \right)^{-1}$$

$$\left(\frac{j\omega}{6} + 1 \right)^{-1} \quad (j\omega)^{-1} \quad \frac{1}{6}$$

Las frecuencias de corte de los cinco primeros términos son, respectivamente:

$$\omega = 2 \text{ rad/s} \quad \omega = 1 \text{ rad/s} \quad \omega = 4 \text{ rad/s} \quad \omega = 6 \text{ rad/s} \quad \omega = 1 \text{ rad/s}$$

Automática: problemas resueltos

Para dibujar el diagrama de Bode de magnitud, lo hacemos por separado para cada factor, como mostramos desde la figura 11.9 hasta la figura 11.14 y luego obtenemos la curva global sumando algebraicamente las curvas individuales, tal como aparece en la figura 11.15.

Por debajo de $\omega = 1$ rad/s el trazo tiene una pendiente de -20 db/década. Tras la primera frecuencia de transición ($\omega=1$ rad/s) la pendiente cambia a -60db/década. En $\omega = 2$ rad/s la pendiente pasa a ser de -20db/década, cambiando de nuevo en $\omega = 4$ rad/s hasta -40db/década. Por último, en $\omega = 6$ rad/s la pendiente pasa a ser -60db/década.

En la figura 11.15 aparece el trazo de la curva exacta del logaritmo de la magnitud para $G(j\omega)$.

Para dibujar la curva completa de ángulo de fase, hay que trazar las curvas de ángulo de fase de todos los factores, como mostramos desde la figura 11.9 hasta la figura 11.14. La suma algebraica de todas las curvas de ángulo de fase produce la curva completa de ángulo de fase que presentamos en la figura 11.15. En ella podemos observar que el margen de fase es positivo y por tanto concluir que para $K=1$ el sistema es estable. Si aumentamos K pero sin sobrepasar el valor 14, se mantiene estable, pero a partir de este valor y hasta $K=64$ el margen de fase es negativo tal como muestra la figura 11.16 y el sistema es inestable. Si seguimos aumentando K por encima de 64 pero por debajo de 195, el margen de fase es positivo (figura 11.17) y por tanto estable el sistema. Por último, cuando K tiene un valor superior a 195, el margen de fase es negativo (figura 11.18) y el sistema inestable.

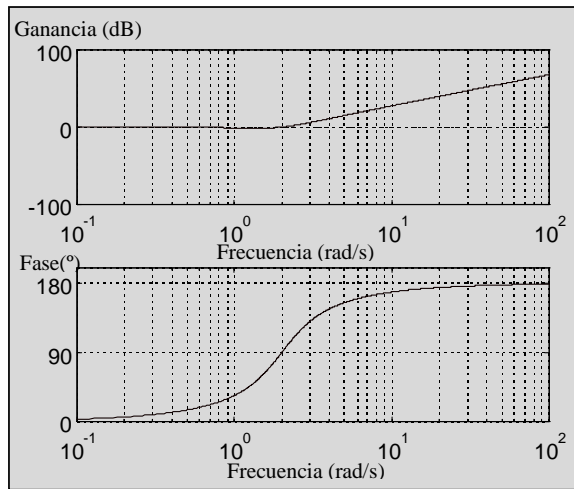


figura 11.9

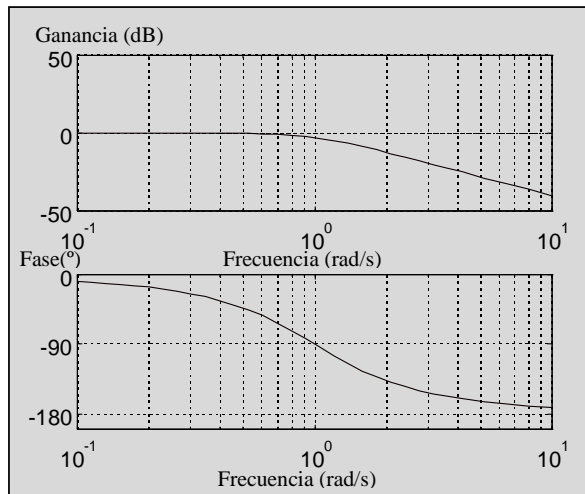


figura 11.10

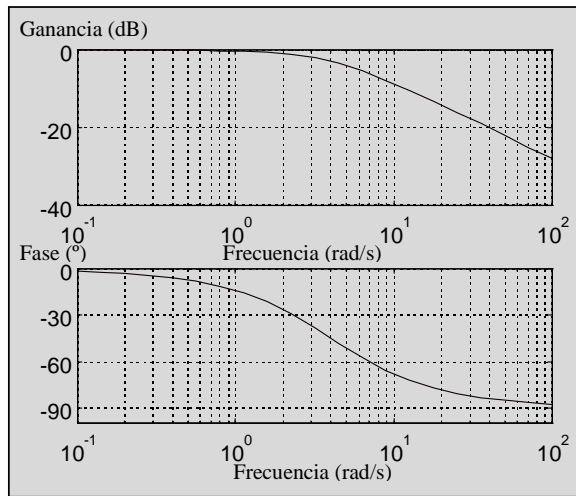


figura 11.11

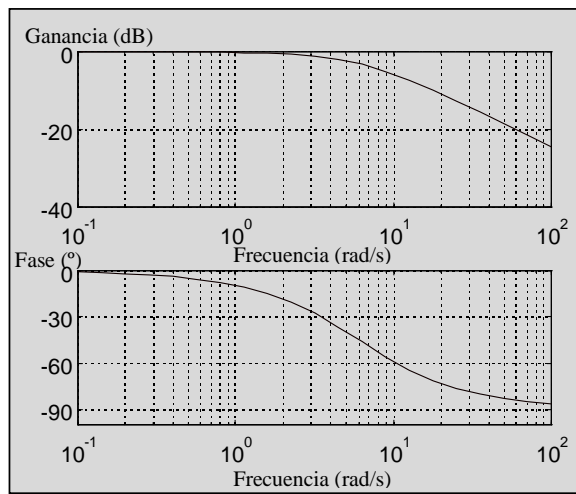


figura 11.12

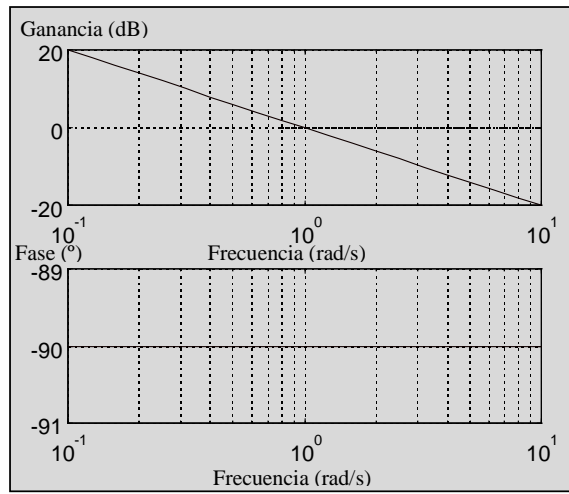


figura 11.13

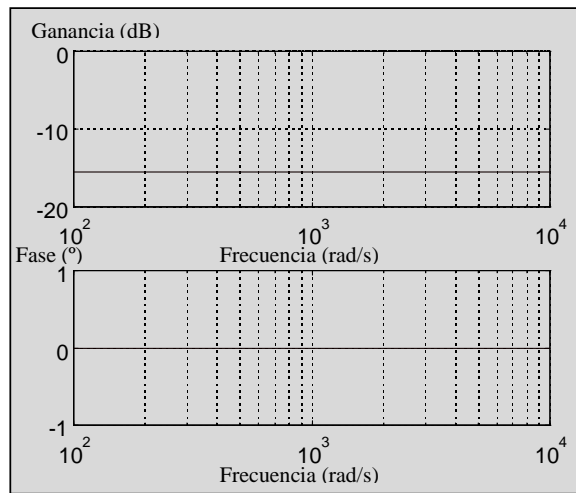


figura 11.14

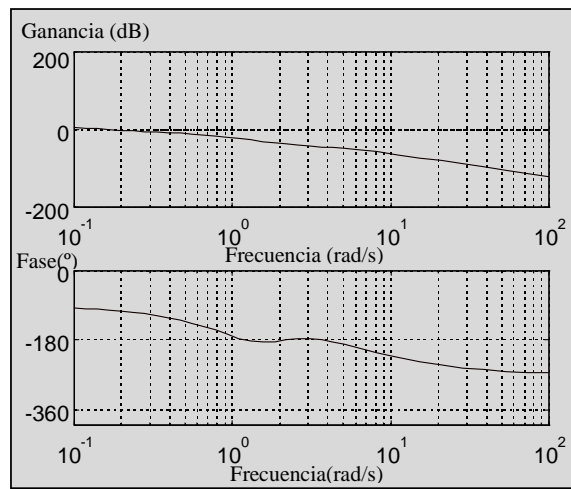


figura 11.15

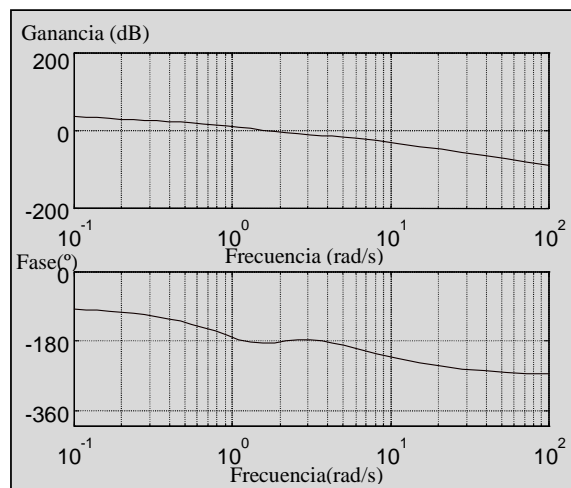


figura 11.16

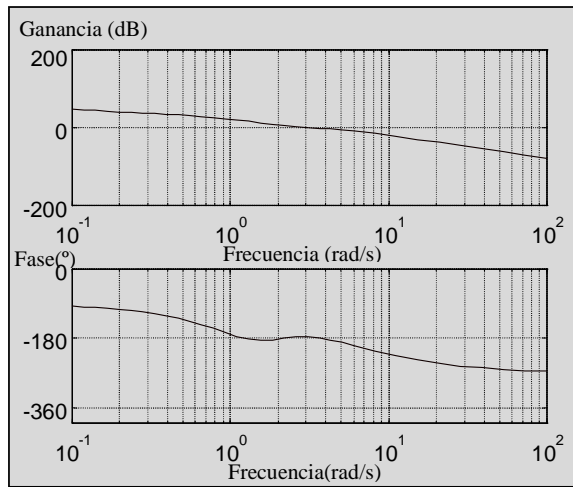


figura 11.17

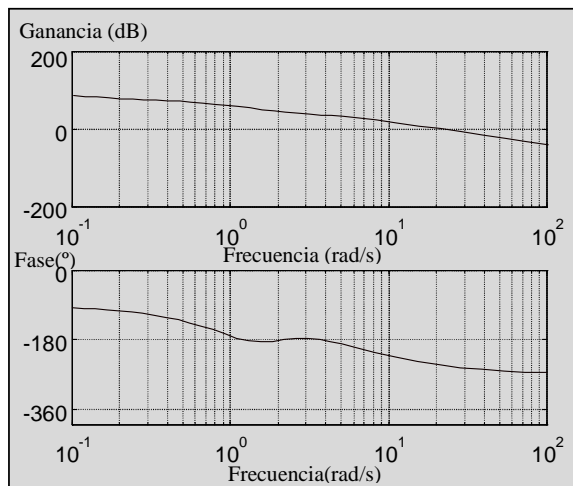


figura 11.18

86.- Encontrar la función de transferencia para la gráfica de magnitud mostrada en la figura 11.19. Suponer que la planta es estable y de fase mínima.

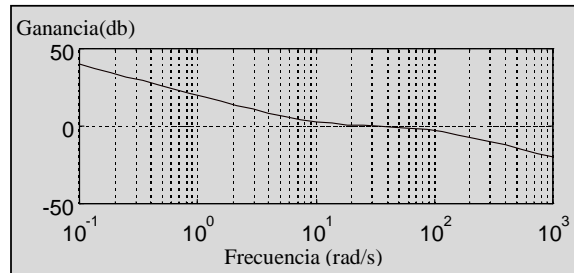


figura 11.19

Solución:

En este problema tenemos que determinar la función de transferencia de la planta a partir de mediciones experimentales.

Inicialmente, aproximaremos la gráfica de magnitud determinada experimentalmente mediante la gráfica de la magnitud asintótica. Puesto que la gráfica sólo contiene rectas de pendiente que son múltiplos enteros de 20 db/dec, podemos obtenerla mediante prueba y error la aproximación asintótica de una manera considerablemente simple. La forma de la función de transferencia la podemos obtener por inspección de la aproximación asintótica ya que los puntos de cambio de pendiente de dicha aproximación se corresponden con la localización de los polos y ceros de la función de transferencia. Finalmente, la conjunción de las gráficas de magnitud y fase, determinadas experimentalmente, identifican de manera única a la función de transferencia.

Si suponemos que el sistema es de fase mínima, utilizando únicamente la gráfica de magnitud podemos determinar la forma de la función de transferencia, cosa que no podemos hacer si el sistema es de fase no mínima.

En el diagrama de amplitud, la pendiente inicial es de -20db/dec por lo que la planta debe contener un integrador. Debido a que la planta es de fase mínima y que la pendiente final es de -20db/dec concluimos que la diferencia entre el número de polos y el de ceros es uno.

Si eliminamos en la gráfica el efecto del integrador restando punto a punto $-20 \log \omega$ obtenemos la figura 11.20.

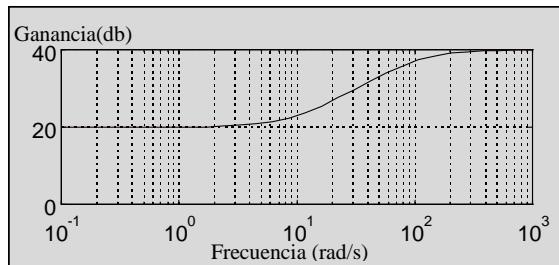


figura 11.20

En ella vemos que la ganancia a frecuencia cero es de 20db, lo que equivale a $K=10$.

Por otra parte, vemos que la pendiente cambia en torno a la frecuencia $\omega=10$ rad/s desde 0 db/dec hasta 20 db/dec siendo en esta frecuencia donde hay 3db de diferencia entre la representación asintótica y la real, por lo que en $\omega=10$ rad/s tenemos un cero de la función de transferencia. De igual forma, en torno a la frecuencia $\omega=100$ rad/s la pendiente cambia de 20db/dec a 0 db/dec siendo en esa frecuencia donde hay 3 db de diferencia entre la representación asintótica y la real, indicándonos que en $\omega=100$ rad/s hay un polo simple.

Concluyendo, la función de transferencia correspondiente a la planta cuyo diagrama de Bode de magnitud viene dado por la figura 11.19 toma la forma:

$$G(s) = \frac{10(1 + s / 10)}{s(1 + s / 100)} = \frac{100(10 + s)}{s(s + 100)}$$

87.- Encontrar la función de transferencia correspondiente a la gráfica de magnitud mostrada en la figura 11.21. Suponer que la planta es estable y de fase mínima.

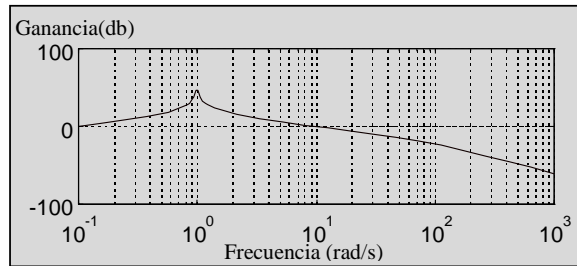


figura 11.21

Solución:

En el diagrama de amplitud, la pendiente inicial es de 20db/dec por lo que la planta debe contener un derivador. Debido a que la planta es de fase mínima y que la pendiente final es de -40db/dec concluimos que la diferencia entre el número de polos y el de ceros es dos.

Si eliminamos en la figura 11.21 el efecto del derivador, sumando punto a punto $20\log\omega$ obtenemos la figura 11.22. En ella vemos que la ganancia a frecuencia cero es de 20db, lo que equivale a $K=10$.

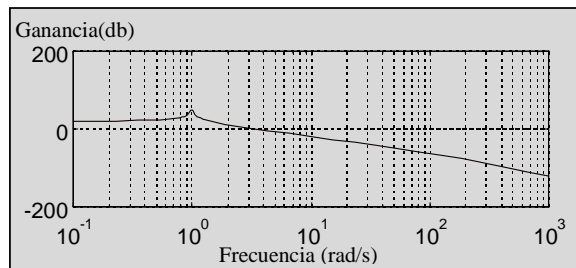


figura 11.22

Si observamos detenidamente este diagrama de amplitud vemos que existen polos complejos conjugados, por lo que necesitamos encontrar la frecuencia natural amortiguada ω_n y el factor de amortiguamiento ξ asociados a ellos.

La intersección de las asíntotas a bajas frecuencias e intermedias la encontramos en $\omega=1$ rad/s por lo que concluimos que $\omega_n=1$ rad/s.

Con la expresión:

$$G_p(j\omega_n) = \frac{1}{2\xi}$$

podemos determinar que $\xi=0.005$.

Por último, vemos que la pendiente cambia en torno a la frecuencia $\omega=100$ rad/s desde -40 db/dec hasta -60 db/dec, siendo en esta frecuencia donde hay 3db de diferencia entre la representación asintótica y la real, por lo que en $\omega=100$ rad/s tenemos un polo simple de la función de transferencia.

Concluyendo, la función de transferencia correspondiente a la planta, cuyo diagrama de Bode de magnitud viene dado por la figura 11.21, toma la forma:

$$G(s) = \frac{10s}{(1 + s/100)(s^2 + 0.01s + 1)} = \frac{1000s}{(100 + s)(s^2 + 0.01s + 1)}$$

88.- Encontrar la función de transferencia correspondiente a la gráfica de magnitud mostrada en la figura 11.23. Suponer que la planta es estable y de fase mínima.

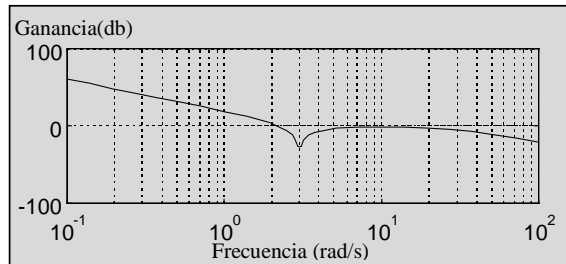


figura 11.23

Solución:

En el diagrama de amplitud, la pendiente inicial es de -40db/dec por lo que la planta debe contener dos integradores. Debido a que la planta es de fase mínima y que la pendiente final es de -40db/dec concluimos que la diferencia entre el número de polos y ceros es dos.

Si eliminamos en la figura 11.23 el efecto de los integradores sumando punto a punto $40\log\omega$ obtenemos la figura 11.24. Vemos que la ganancia a frecuencia cero es de 20db , lo que equivale a $K=10$.

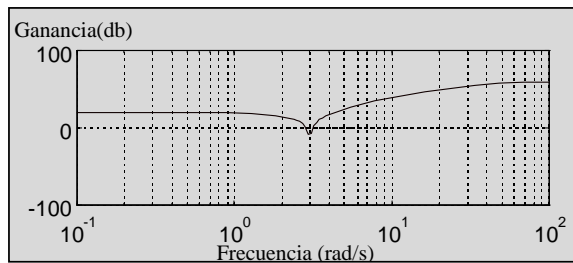


figura 11.24

Si observamos detenidamente este diagrama de amplitud, vemos que existen ceros complejos conjugados, por lo que necesitamos encontrar la

frecuencia natural amortiguada ω_n y el factor de amortiguamiento ξ asociados a ellos.

Las asíntotas a bajas frecuencias e intermedias se cruzan en $\omega=3$ rad/s por lo que concluimos que $\omega_n = 3$ rad/s.

Con la expresión:

$$G_p(j\omega_n) = \frac{1}{2\xi}$$

podemos determinar que $\xi = 0.0025$.

Por último, vemos que la pendiente cambia en torno a la frecuencia $\omega=30$ rad/s desde 40 db/dec hasta 0 db/dec, siendo en esta frecuencia donde hay 6db de diferencia entre la representación asintótica y la real, por lo que en $\omega=30$ rad/s tenemos un polo doble de la función de transferencia.

Concluyendo, la función de transferencia correspondiente a la planta cuyo diagrama de Bode de magnitud viene dado por la figura 11.23 toma la forma:

$$G(s) = \frac{10((s^2/9) + (0.005/3)s + 1)}{s^2(1 + s/30)^2} = \frac{1000(s^2 + 0.015s + 9)}{s^2(30 + s)^2}$$

89.- Encontrar la función de transferencia correspondiente a la gráfica mostrada en la figura 11.25. La planta no es necesariamente estable o de fase mínima.

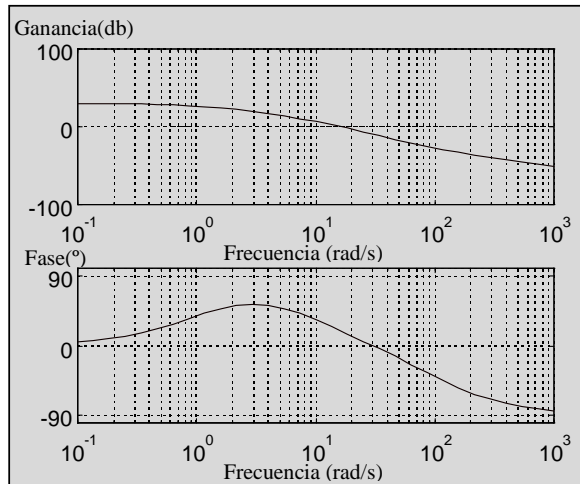


figura 11.25

Solución:

Inicialmente, observamos que a bajas frecuencias el diagrama de magnitud evoluciona con 0db/dec con un valor aproximado de 30db= $20\log K$, por lo que $K=30$.

En el diagrama de amplitud vemos que la pendiente inicial a bajas frecuencias es de 0db/dec, manteniéndose así hasta $\omega=1$ rad/s donde pasa a ser de -20db/dec. En $\omega=10$ rad/s de nuevo vuelve a cambiar la pendiente y pasa a ser a -40db/dec. Finalmente, en $\omega=100$ rad/s queda como -20db/dec, manteniéndose así hasta altas frecuencias.

Para un sistema de fase mínima, esperaríamos un cambio de fase de aproximadamente -45° alrededor de $\omega=1$ rad/s, sin embargo, a partir de la gráfica de fase vemos que ha aumentado a un valor cercano a 45 que unido al cambio en la curva de magnitud con una pendiente decreciente, indica

que hay un polo en el semiplano derecho y lo identificamos en la forma de constantes de tiempo como $1/(1-s)$.

Por otra parte, la disminución de la pendiente en la gráfica de magnitud en $\omega=10$ rad/s debida a un polo en el semiplano izquierdo, concuerda con la pérdida de 45° de fase entorno a esa frecuencia, por lo que concluimos que tenemos un polo de la forma $1/((s/10)+1)$.

Finalmente, observamos que en $\omega=100$ rad/s hay un nuevo aumento de pendiente en la gráfica de magnitud que es debido a un cero que lleva asociado no un aumento de la fase como en principio cabría esperar, sino una disminución de aproximadamente 45° en torno a esta frecuencia, por lo que ambos datos nos indican que hay un cero en el semiplano derecho, que lo identificamos en la forma de constantes de tiempo como $(1-(s/100))$.

Con todos estos datos, podemos concluir que la función de transferencia correspondiente al diagrama de Bode de magnitud mostrado en la figura 11.25 viene dada por:

$$G(s) = \frac{30\left(\frac{s}{100} - 1\right)}{(s-1)\left(\frac{s}{10} + 1\right)} = \frac{3(s-100)}{(s-1)(s+10)}$$

que corresponde a un sistema de fase no mínima.

90.- Encontrar la función de transferencia correspondiente a la gráfica mostrada en la figura 11.26. La planta no es necesariamente estable o de fase mínima.

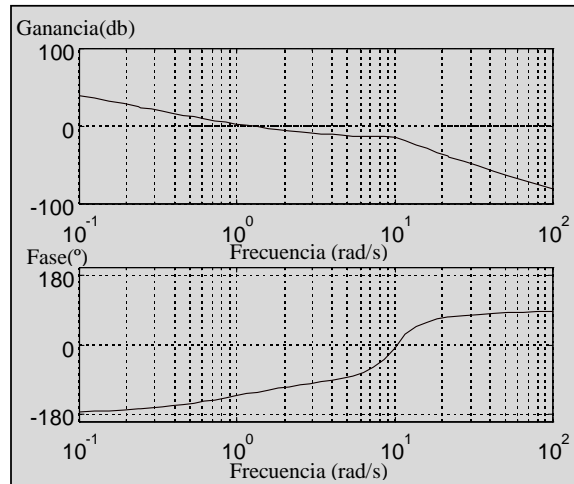


figura 11.26

Solución:

En el diagrama de amplitud, la pendiente inicial es de -40db/dec por lo que la planta debe contener dos integradores. Debido a que la pendiente final es de -60db/dec concluimos que la diferencia entre el número de polos y el de ceros es tres.

Si eliminamos en la gráfica el efecto de los integradores sumando punto a punto $40\log\omega$ obtenemos la figura 11.27, donde vemos que la ganancia a frecuencia cero es de 0db , lo que equivale a $K=1$.

Por otra parte, vemos que la pendiente cambia en torno a la frecuencia $\omega=1\text{ rad/s}$ desde 0 db/dec hasta 20 db/dec siendo en esta frecuencia donde hay 3db de diferencia entre la representación asintótica y la real y donde la fase ha aumentado 45° , por lo que en $\omega=1\text{ rad/s}$ tenemos un cero de la función de transferencia que lo identificamos en la forma de constantes de tiempo como $(s+1)$.

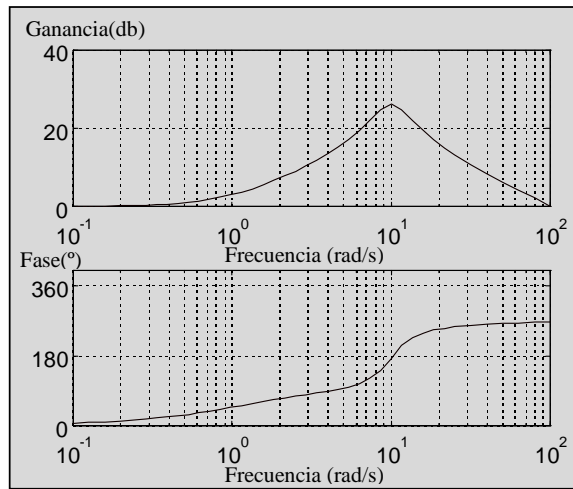


figura 11.27

Si eliminamos en la figura 11.27 el efecto del cero obtenemos la figura 11.28.

Si observamos detenidamente el diagrama de amplitud, vemos que existen polos complejos conjugados por lo que necesitamos encontrar la frecuencia natural amortiguada ω_n y el factor de amortiguamiento ξ asociados a ellos.

La intersección de las asíntotas a bajas y altas frecuencias la encontramos en $\omega=10$ rad/s por lo que concluimos que $\omega_n = 10$ rad/s.

Con la expresión:

$$G_p(j\omega_n) = \frac{1}{2\xi}$$

podemos determinar que $\xi=0.25$.

Si este par de polos complejos conjugados estuviesen a la izquierda del eje imaginario, la fase disminuiría 90° en las inmediaciones de ω_n , pero esto no ocurre así, ya que, lo que sucede es que aumenta en 90° , por lo que concluimos que los dos polos complejos conjugados son de fase no mínima, es decir están ubicados a la derecha del eje imaginario.

Automática: problemas resueltos

Con todos estos datos, podemos escribir la función de transferencia correspondiente a la planta cuyo diagrama de Bode de magnitud viene dado por la figura 11.26, en la forma:

$$G(s) = \frac{(s + 1)}{s^2 \left(\left(\frac{s}{10} \right)^2 - 0.05s + 1 \right)} = \frac{100(s + 1)}{s^2 (s^2 - 5s + 100)}$$

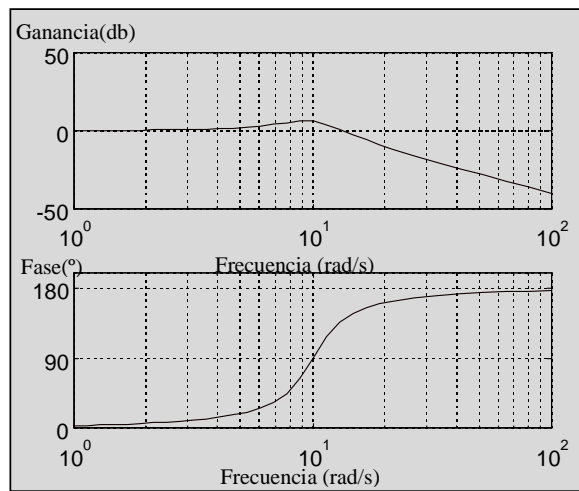


figura 11.28

91.- Analizar la estabilidad de un sistema con realimentación unitaria que tiene como función de transferencia de lazo abierto

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(1-s)}$$

Solución:

Inicialmente desarrollamos $G(j\omega)$ en la forma normalizada siguiente

$$G(j\omega) = \frac{10}{(j\omega+1)(1-j\omega)} = \frac{10}{(1+j\omega)(1-j\omega)}$$

Esta función está compuesta por los siguientes factores

$$10 \quad (1-j\omega)^{-1} \quad (1+j\omega)^{-1}$$

La frecuencia de corte del segundo y tercer término, es $\omega = 1 \text{ rad/s}$.

Para dibujar el diagrama de Bode de magnitud, lo hacemos por separado para cada factor, como mostramos en la figura 11.29 y figura 11.30 y luego obtenemos la curva completa sumando algebraicamente las curvas individuales junto con la de la ganancia $K=10$, tal como aparece en la figura 11.31. Por debajo de $\omega=1\text{rad/s}$ la magnitud tiene una pendiente de 0 db/dec . Tras la frecuencia de transición la pendiente cambia a -40db/dec .

Para dibujar la curva completa de ángulo de fase, hay que trazar las curvas de ángulo de fase de todos los factores, como mostramos en la figura 11.29 y figura 11.30. La suma algebraica de todas las curvas de ángulo de fase produce la curva completa de ángulo de fase que presentamos en la figura 11.31.

El margen de fase es -180° y el de ganancia infinito, por lo que el sistema, que es de fase no mínima debido al polo en el semiplano derecho, es inestable para cualquier valor de la ganancia.

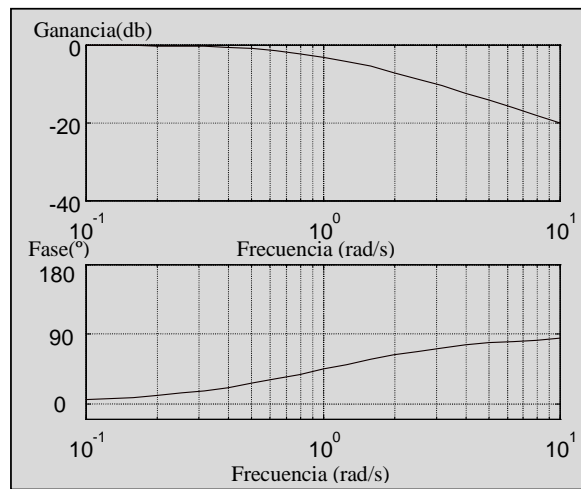


figura 11.29

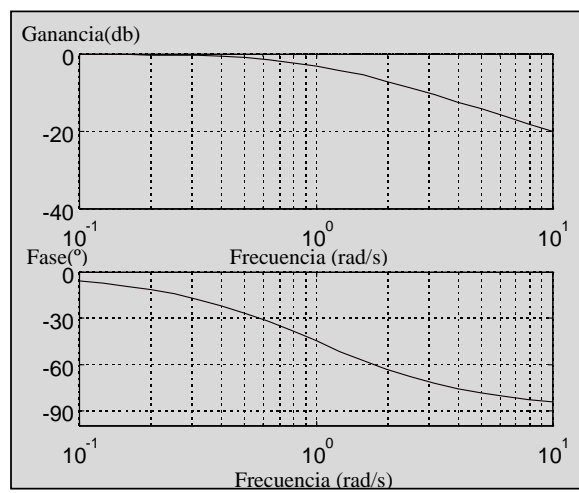


figura 11.30

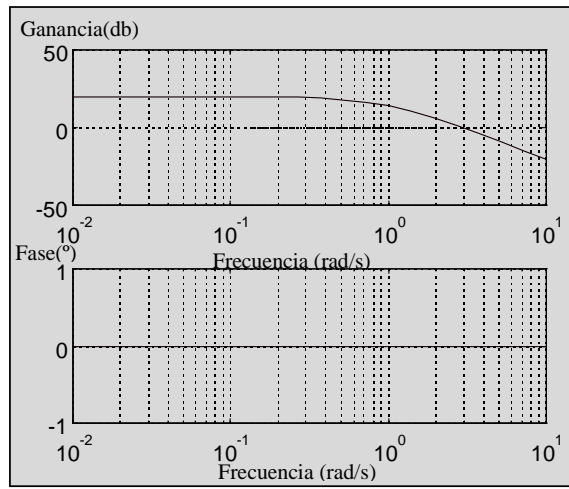


figura 11.31

92.- Sea un sistema cuya función de transferencia de lazo abierto es:

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 0.7s + 1600)}{s(s + 160)(s + 2)}$$

Obtener el diagrama de Bode y analizar la estabilidad del sistema.

Solución:

Inicialmente desarrollamos $G(j\omega)$ en forma normalizada:

$$G(j\omega) = \frac{K((j\omega)^2 + 0.7j\omega + 1600)}{j\omega(j\omega + 160)(j\omega + 2)}$$

Si $K=1$:

$$G(j\omega) = \frac{1600\left(\frac{(j\omega)^2}{1600} + \frac{0.7}{1600}j\omega + 1\right)}{160 * 2j\omega\left(\frac{j\omega}{160} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{2} + 1\right)} = \frac{5\left(\frac{(j\omega)^2}{1600} + \frac{0.7}{1600}j\omega + 1\right)}{j\omega\left(\frac{j\omega}{160} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{2} + 1\right)}$$

Esta función está compuesta por los siguientes factores:

$$\left(\frac{(j\omega)^2}{1600} + \frac{0.7}{1600}j\omega + 1\right) \quad 1/j\omega \quad \left(\frac{j\omega}{160} + 1\right)^{-1} \quad \left(\frac{j\omega}{2} + 1\right)^{-1} \quad 5$$

Las frecuencias de corte de los cuatro primeros términos son, respectivamente:

$$\omega = 40 \text{ rad/s}; \quad \omega = 1 \text{ rad/s}; \quad \omega = 160 \text{ rad/s}; \quad \omega = 2 \text{ rad/s}$$

Para dibujar el diagrama de Bode, lo hacemos por separado para cada factor, como mostramos desde la figura 11.33 hasta la figura 11.36 y luego obtenemos la curva compuesta sumando algebraicamente las curvas individuales, tal como aparece en la figura 11.37.

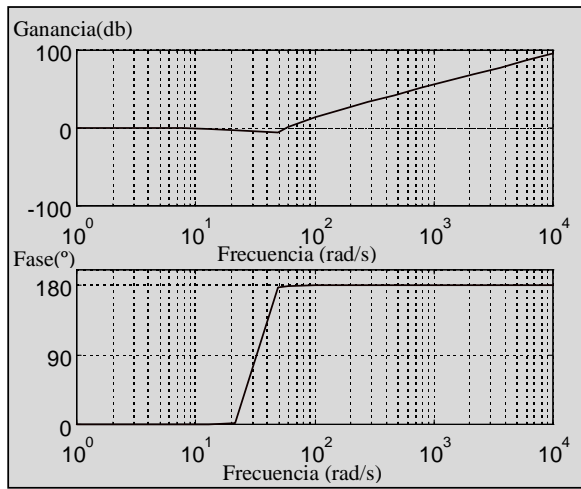


figura 11.32

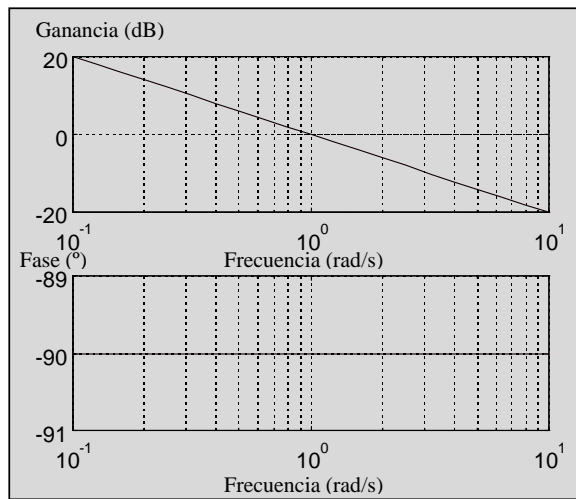


figura 11.33

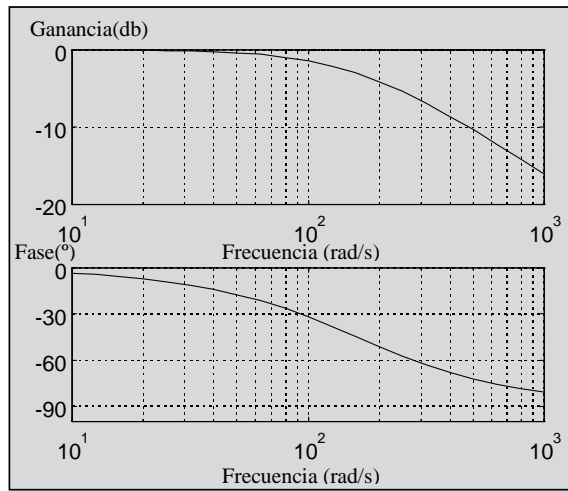


figura 11.34

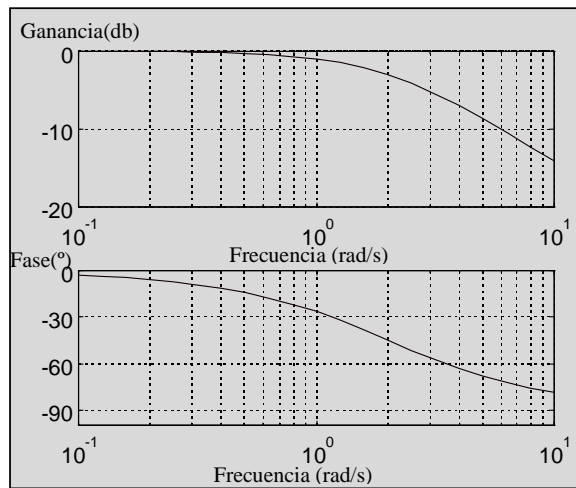


figura 11.35

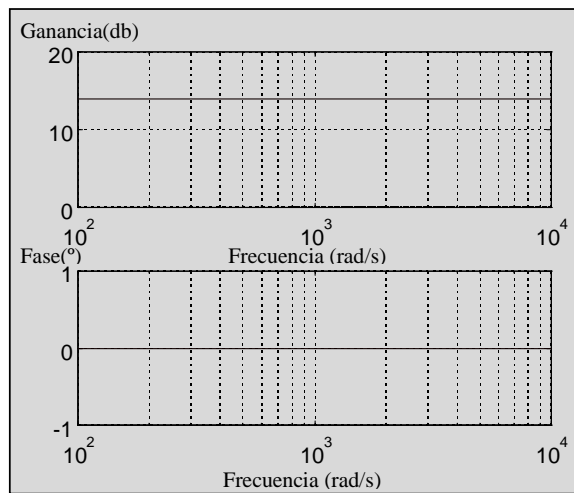


figura 11.36

Por debajo de $\omega = 2 \text{ rad/s}$ el trazo tiene una pendiente de -20 db/década . Tras la frecuencia de transición $\omega = 2 \text{ rad/s}$ la pendiente cambia a -40db/década . En $\omega = 40 \text{ rad/s}$ la pendiente pasa a ser de 0db/década , cambiando de nuevo en $\omega = 160 \text{ rad/s}$ hasta -20db/década .

En la figura 11.37 aparece el trazo de la curva exacta del logaritmo de la magnitud para $G(j\omega)$.

Para dibujar la curva completa de ángulo de fase, hay que trazar las curvas de ángulo de fase de todos los factores como mostramos desde la figura 11.33 hasta la figura 11.36. La suma algebraica de todas las curvas de ángulo de fase produce la curva completa de ángulo de fase que la presentamos en la figura 11.37.

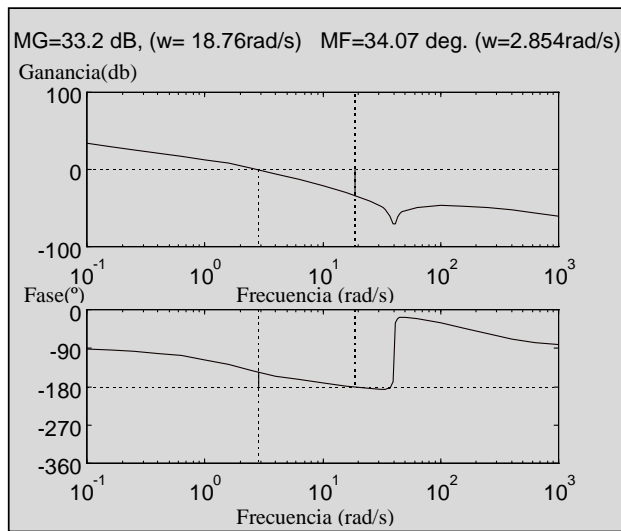


figura 11.37

Como podemos ver, la curva de fase corta a la línea de -180° en dos ocasiones (frecuencias de cruce de fase), $\omega=18.8 \text{ rad/s}$ y $\omega=38 \text{ rad/s}$, para las cuales la ganancia vale 33 db y 64 db respectivamente, lo que nos permite afirmar que el sistema es inestable en el intervalo:

$$K \in [45, 1620]$$

ya que para estos valores, el margen de fase sería negativo, tal como obtuvimos por el método del lugar de las raíces en el tema anterior.

93.- Un sistema de realimentación unitaria tiene por función de transferencia en bucle abierto:

$$G(s) = \frac{100(1 + 0.1s)}{s^2 - 1}$$

Obtener:

- a) El diagrama de Bode.
- b) La estabilidad.
- c) El margen de fase y de ganancia.
- d) El error estático de posición.
- e) Realizar los apartados a, b, c y d para la función de transferencia en bucle abierto:

$$G_r(s) = \frac{10(1 + 0.1s)}{s(s^2 - 1)}$$

que es la resultante de introducir una red correctora de tipo integral:

$$G_i(s) = \frac{1}{10s}$$

a la función de transferencia inicial. Comparar los resultados.

Solución:

a) Inicialmente desarrollamos $G(j\omega)$ en forma normalizada:

$$G(j\omega) = \frac{100(1 + 0.1j\omega)}{(j\omega)^2 - 1} = \frac{100(0.1j\omega + 1)}{(j\omega - 1)(j\omega + 1)}$$

Esta función está compuesta por los siguientes factores:

$$(j\omega - 1)^{-1} \quad (j\omega + 1)^{-1} \quad (0.1j\omega + 1) \quad 100$$

Las frecuencias de corte de los tres primeros términos son, respectivamente:

$$\omega = 1 \text{ rad/s} \quad \omega = 1 \text{ rad/s} \quad \omega = 10 \text{ rad/s}$$

Automática: problemas resueltos

Para dibujar el diagrama de Bode de magnitud, lo hacemos por separado para cada factor, como mostramos desde la figura 11.38 hasta la figura 11.41 y luego obtener la curva compuesta sumando algebraicamente las curvas individuales, tal como aparece en la figura 11.42.

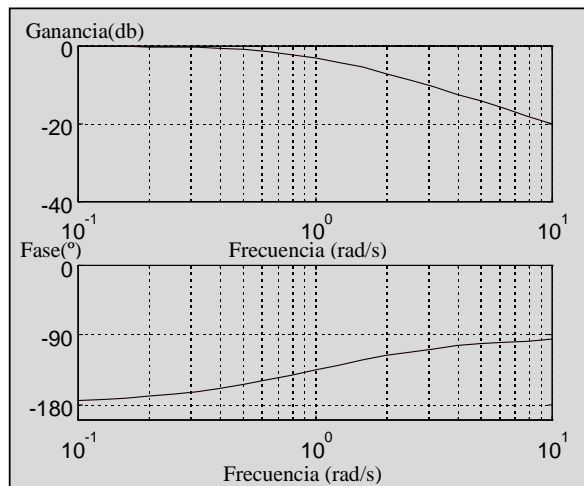


figura 11.38

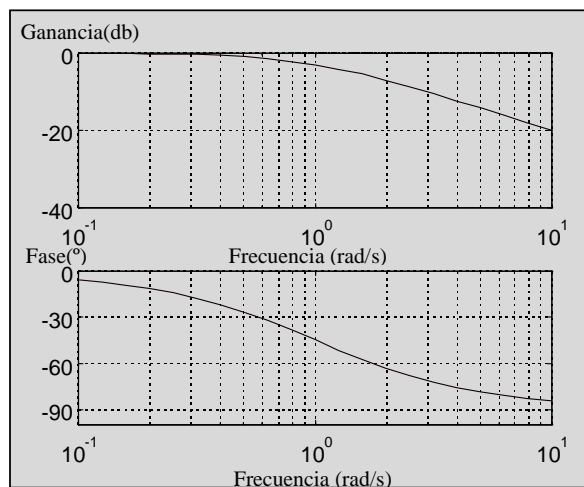


figura 11.39

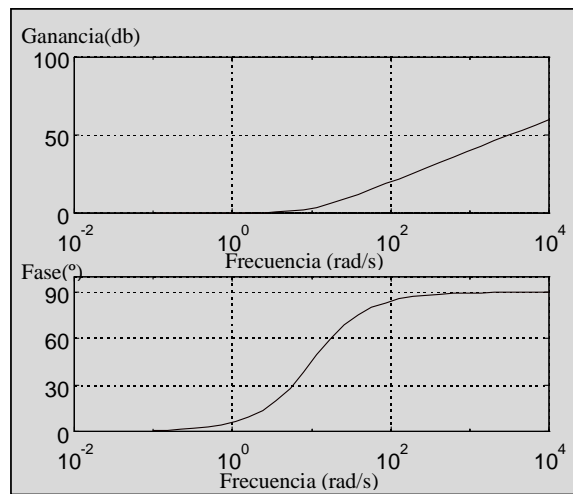


figura 11.40

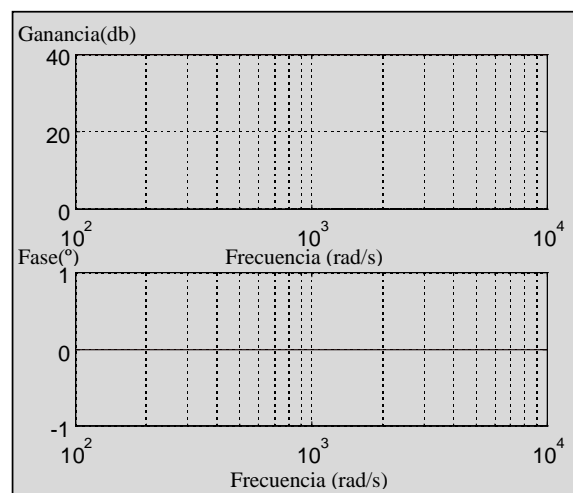


figura 11.41

Por debajo de $\omega = 1$ rad/s el trazo tiene una pendiente de 0 db/dec. Tras la frecuencia de transición $\omega = 1$ rad/s la pendiente cambia a -40db/década y en $\omega = 10$ rad/s cambia a -20db/década.

En la figura 11.42 aparece el trazo de la curva exacta del logaritmo de la magnitud para $G(j\omega)$.

Para dibujar la curva completa de ángulo de fase, hay que trazar las curvas de ángulo de fase de todos los factores, como mostramos desde la figura 11.38 hasta la figura 11.41. La suma algebraica de todas las curvas de ángulo de fase produce la curva completa de ángulo de fase que presentamos en la figura 11.42.

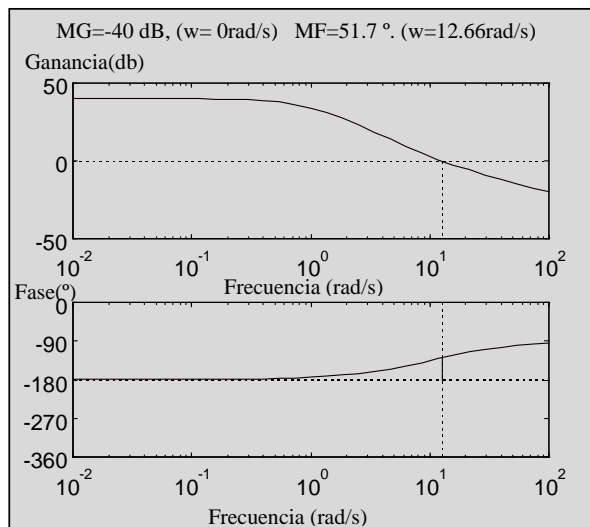


figura 11.42

b) Cuando la curva de amplitud corta a la línea de frecuencias ($\omega=12.66\text{rad/s}$ es la frecuencia de cruce de ganancia), la curva de fase está pasando por -128.3° y el margen de fase vale $MF=51.7^\circ$, por lo que el sistema es estable.

c) Al cortar la curva de amplitud al eje de frecuencias, a la fase le faltan 51.7° para valer -180° , por lo que el margen de fase es $MF=51.7^\circ$.

El margen de ganancia es -40db , puesto que la ganancia es 40db cuando la curva de desfase es asintótica a la línea de fase -180° .

d) El error estático de posición viene dado por:

$$e_{ssp} = \frac{1}{1 + K_p}$$

donde K_p es la constante de posición que por tratarse de un sistema de tipo cero, coincide con la ordenada de la horizontal del diagrama de Bode de magnitud, por lo que:

$$20 \log K_p = 40 \Rightarrow K_p = 100$$

y el error estático de posición es:

$$e_{ssp} = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + 100} \cong 001$$

e) Si introducimos la red correctora $G_r(s)=1/(10s)$ la función de transferencia del sistema en bucle abierto es:

$$G_r(s) = \frac{10(1 + 0.1s)}{s(s^2 - 1)}$$

El diagrama de Bode del término $1/s$ es el mostrado en la figura 11.33 y el del término $1/10$ el mostrado en la figura 11.43, por lo que el diagrama de Bode de la función de transferencia $G_r(s)$ toma la forma mostrada en la figura 11.44.

Por debajo de $\omega=1$ rad/s el trazo tiene una pendiente de -20 db/década. Tras la frecuencia de transición $\omega=1$ rad/s la pendiente cambia a -60db/década y en $\omega=10$ rad/s pasa a ser de -40db/década.

En la figura 11.44 aparece la curva exacta del logaritmo de la magnitud y de la fase para $G_r(j\omega)$. Cuando la curva de amplitud corta a la línea de frecuencias ($\omega=2.02$ rad/s es la frecuencia de cruce de ganancia), la curva de fase está pasando por -258.61° por lo que el sistema es inestable ya que el margen de fase vale $MF=-78.61^\circ$.

El margen de ganancia es infinito, puesto que la curva de fase siempre esta por debajo de -180° .

Prolongando la recta de pendiente -20db/década, corta al eje de frecuencias en $\omega=10$ rad/s, por lo que la constante de error de velocidad es $K_v=\omega=10$ y el error estático de velocidad:

$$e_{ssv} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{10} = 0.1$$

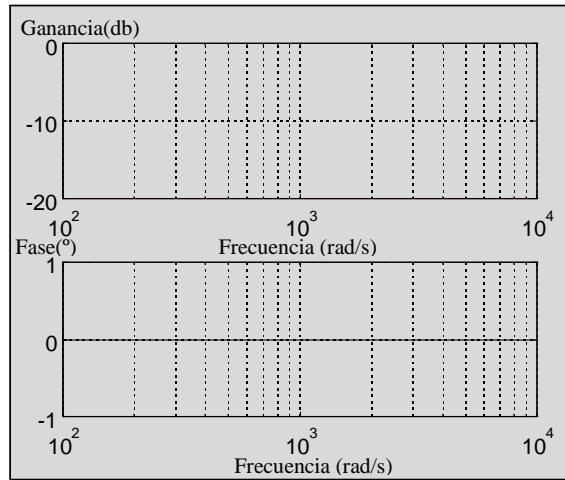


figura 11.43

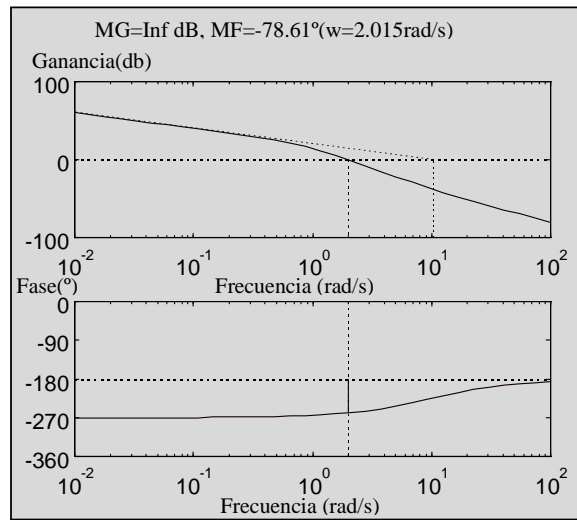


figura 11.44

94.- Obtener los diagramas de Bode de la función de transferencia de lazo abierto y comprobar por inspección de dichos diagramas si corresponde a un sistema de fase mínima o no. Analizar la estabilidad del sistema.

$$G(s) = \frac{(1-3s)}{(s+1)(s-1)}$$

Solución:

Inicialmente desarrollamos $G(j\omega)$ en forma normalizada:

$$G(j\omega) = \frac{(1-3j\omega)}{(j\omega+1)(j\omega-1)}$$

Esta función está compuesta por los siguientes factores:

$$(1-j3\omega) \quad (j\omega+1)^{-1} \quad (j\omega-1)^{-1}$$

La frecuencia de cruce de los tres términos, son respectivamente:

$$\omega = 1/3 \text{ rad/s} \quad \omega = 1 \text{ rad/s} \quad \omega = 1 \text{ rad/s}$$

Para dibujar el diagrama de Bode de magnitud, lo hacemos por separado para cada factor, y luego obtenemos la curva compuesta sumando algebraicamente las curvas individuales.

El diagrama de Bode de magnitud de $(1-j3\omega)$ es el mostrado en la figura 11.45, el de $(1+j\omega)^{-1}$ el de la figura 11.46 y, por último, el de $(j\omega-1)^{-1}$ es el de la figura 11.47.

Para dibujar la curva completa de ángulo de fase, hay que trazar las curvas de ángulo de fase de todos los factores. La suma algebraica de todas las curvas de ángulo de fase produce la curva completa de ángulo de fase.

El diagrama de fase de $(1-j3\omega)$ es el mostrado en la figura 11.45, el de $(1+j\omega)^{-1}$ el de la figura 11.46 y, por último, el de $(j\omega-1)^{-1}$ es el mostrado en la figura 11.47.

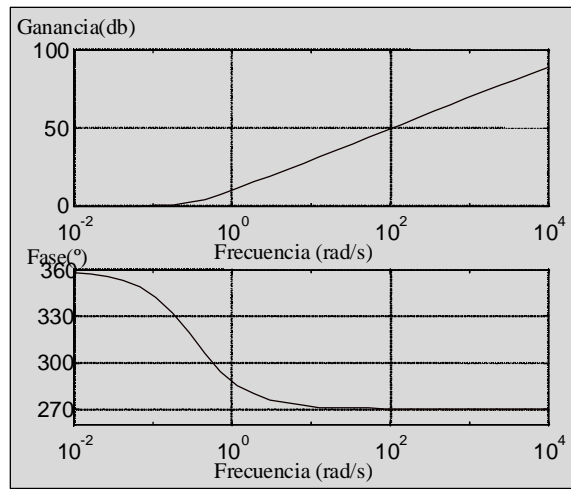


figura 11.45

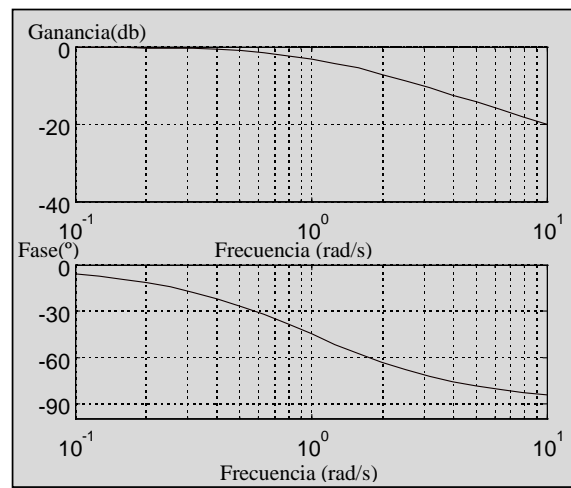


figura 11.46

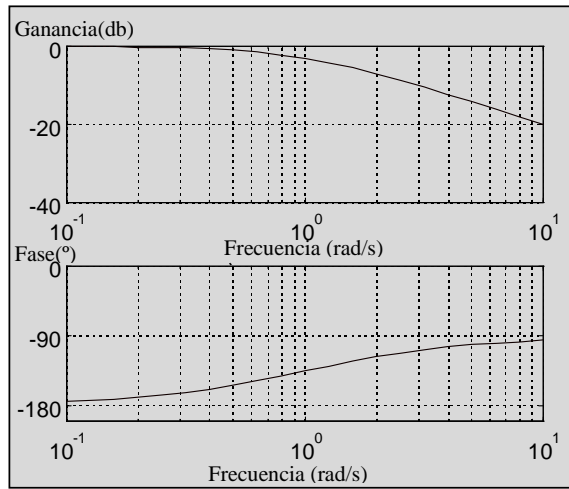


figura 11.47

En la figura 11.48 aparece el trazo de la curva exacta del logaritmo de la magnitud y de la fase para $G(j\omega)$.

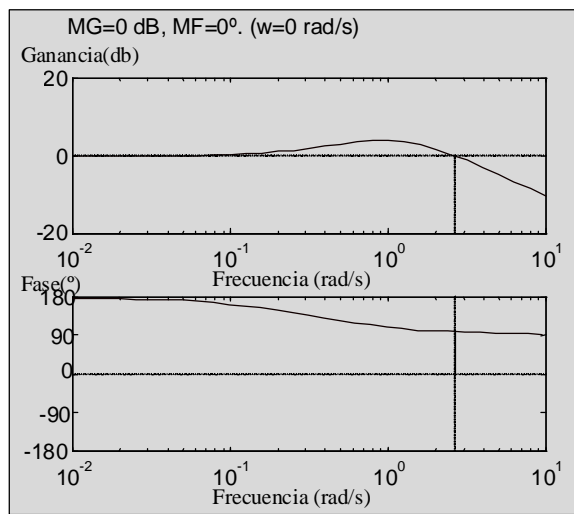


figura 11.48

Automática: problemas resueltos

Por debajo de $\omega = 1/3$ rad/s el trazo tiene una pendiente de 0 db/década. Tras la frecuencia de transición $\omega = 1/3$ rad/s la pendiente cambia a 20db/década. En $\omega = 1$ rad/s la pendiente pasa a ser de -20db/década.

Como podemos ver en la figura 11.48, la curva de magnitud para altas frecuencias tiene una pendiente de -20db/dec, y la de fase tiende a -90° , datos que no son suficientes para decir si el sistema es de fase mínima o no. Por inspección de la curva de magnitud podemos afirmar que en $\omega=1/3$ rad/s hay un cero ya que cambia la pendiente de 0db/dec a 20db/dec. Y observando la curva de fase a esa frecuencia podemos concluir que en $s=1/3$ tenemos un cero (término en la forma $(1-3s)$).

En $\omega=1$ rad/s tenemos un nuevo cambio de pendiente desde 20db/dc hasta -20db/dc lo que nos hace pensar que en esa frecuencia tenemos un polo doble. Pero la fase no pasa de -90° a -270° sino que tiende hacia -90° lo que nos induce a pensar que tenemos algún polo de fase no mínima y dicho término toma la forma $1/(1-s^2)$.

Resumiendo, por inspección de los diagramas de Bode de magnitud y fase a altas frecuencias, no podemos deducir que el sistema es de fase mínima por el simple hecho de que a altas frecuencias la fase tienda a -90° (n° polos $-n^\circ$ ceros) y la magnitud caiga con una pendiente de -20db/dec (n° polos $-n^\circ$ ceros). Para deducir si es de fase mínima o no deberemos analizar ambas gráficas en todo el espectro de frecuencias.

Por otra parte, el sistema es inestable ya que es de fase no mínima y el margen de fase es de 97.18° .

95.- Obtener el diagrama de Bode de la función de transferencia de lazo abierto y comprobar si corresponde a un sistema de fase mínima o no. Analizar la estabilidad del sistema.

$$G(s) = \frac{(1-3s)}{(s+1)(s+1)}$$

Solución:

Inicialmente desarrollamos $G(j\omega)$ en forma normalizada:

$$G(j\omega) = \frac{(1-3j\omega)}{(j\omega+1)(j\omega+1)}$$

Esta función está compuesta por los siguientes factores:

$$(1-j3\omega) \quad (j\omega+1)^{-1} \quad (j\omega+1)^{-1}$$

La frecuencia de cruce de los tres términos, son respectivamente:

$$\omega = 1/3 \text{ rad/s} \quad \omega = 1 \text{ rad/s} \quad \omega = 1 \text{ rad/s}$$

Para dibujar el diagrama de Bode, lo hacemos por separado para cada factor y luego obtenemos la curva compuesta sumando algebraicamente las curvas individuales.

El diagrama de Bode de $(1-j3\omega)$ es el mostrado en la figura 11.45 y el de $(1+j\omega)^{-1}$ en la figura 11.46.

En la figura 11.49 aparece el trazo de la curva exacta del logaritmo de la magnitud y de la fase para $G(j\omega)$. Por debajo de $\omega = 1/3 \text{ rad/s}$ el trazo tiene una pendiente de 0 db/década . Tras la frecuencia de transición $\omega = 1/3 \text{ rad/s}$ la pendiente cambia a 20db/década . En $\omega = 1 \text{ rad/s}$ la pendiente pasa a ser de -20db/década .

Como podemos ver, la curva de magnitud para altas frecuencias tiene una pendiente de -20db/dec y la de fase tiende a -270° datos que son suficientes para decir que el sistema es de fase no mínima.

Resumiendo, por inspección de los diagramas de Bode de magnitud y fase a altas frecuencias, podemos deducir que el sistema es de fase no

Automática: problemas resueltos

mínima por el simple hecho de que a altas frecuencias la fase no tiende a -90 (n° polos $-n^\circ$ ceros) y la magnitud cae con una pendiente de -20db/dec (n° polos $-n^\circ$ ceros).

Tanto el margen de fase como el de ganancia son negativos, por lo que el sistema es inestable.

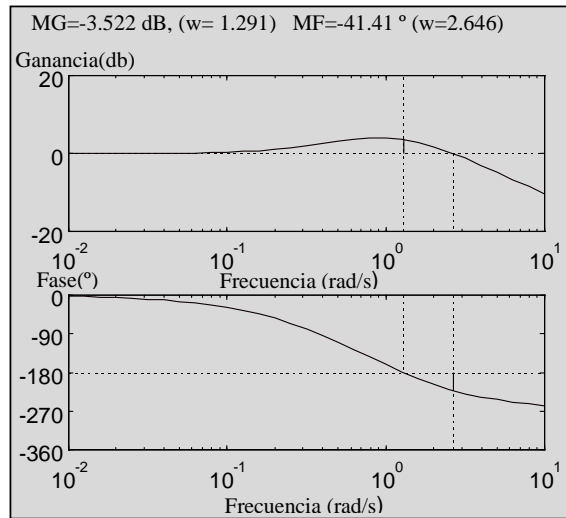


figura 11.49

Tema 12 :

Criterio de estabilidad de Nyquist

96.- Analizar, utilizando el criterio de Nyquist, la estabilidad del sistema con realimentación unitaria cuya función de transferencia en bucle abierto es:

$$G(s) = \frac{K(1-s)}{s+1}$$

Solución:

Para aplicar el criterio de Nyquist, debemos inicialmente trazar el diagrama de Nyquist. Para ello, realizaremos la transformación de la trayectoria cerrada en el plano s mostrada en la figura 12.1 al plano $G(s)H(s)=G(s)$.

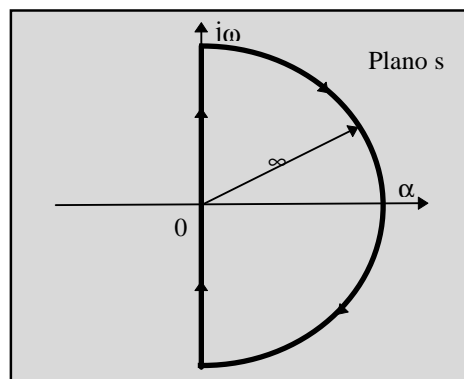


figura 12.1

Como la trayectoria cerrada que hemos considerado en el plano s es continua, cerrada y no atraviesa ningún punto singular, se transforma mediante $G(s)$ en una curva cerrada del plano $G(s)$.

La trayectoria consta de todo el eje $j\omega$ desde $-\infty$ hasta $+\infty$ y un trayecto semicircular de radio infinito en el semiplano derecho del plano s .

A medida que un punto recorre la trayectoria completa en el plano s en sentido horario, se producen N rodeos en torno al origen del plano $G(s)$.

Si transformamos el eje imaginario $j\omega$ mediante $G(s)$ tenemos que:

$$G(s = j\omega) = \frac{K(1 - j\omega)}{1 + j\omega} = \frac{K(1 - j\omega)(1 - j\omega)}{(1 + j\omega)(1 - j\omega)} =$$

$$= \frac{K(1 - j\omega - j\omega - \omega^2)}{1 + \omega^2} = \frac{K(1 - \omega^2)}{1 + \omega^2} - \frac{2j\omega K}{1 + \omega^2}$$

Como el módulo de $G(s=j\omega)$ es K para cualquier frecuencia, tenemos que el eje $j\omega$ se transforma en una circunferencia de radio K en el plano $G(s)$.

Por otro lado, la transformación mediante $G(s)$ de la semicircunferencia de radio infinito resulta ser:

$$G(s = Re^{j\theta}) = \frac{K(1 - Re^{j\theta})}{1 + Re^{j\theta}}$$

donde:

$$R \rightarrow \infty \text{ y } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right]$$

por lo que:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} G(s = Re^{j\theta}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{K(1 - Re^{j\theta})}{1 + Re^{j\theta}} = -K$$

La semicircunferencia de radio infinito se transforma en el punto $-K$ del plano $G(s)$.

Con sendas transformaciones, obtenemos la trayectoria de Nyquist mostrada en la figura 12.2.

Si $K > 1$ la trayectoria de Nyquist da una vuelta en sentido horario en torno al punto -1 ($N=1$) y no hay polos de $G(s)$ en el semiplano derecho del plano s ($P=0$), por lo que $Z=N+P=1 > 0$ lo que indica que el sistema es inestable.

Si $K < 1$ la trayectoria de Nyquist no da vueltas en torno al punto -1 ($N=0$), por lo que $Z=N+P=0$ lo que indica que el sistema es estable.

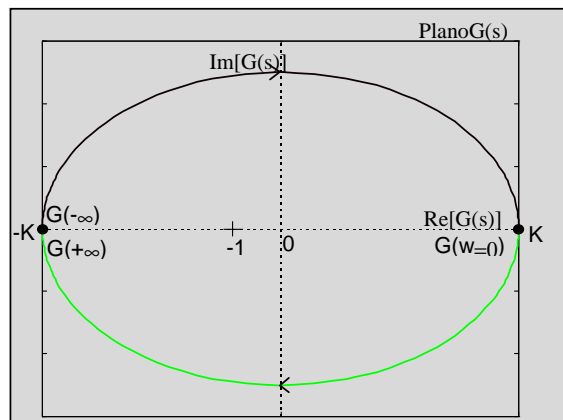


figura 12.2

97.- Analizar, utilizando el criterio de Nyquist, la estabilidad del sistema cuya función de transferencia en bucle abierto es:

$$G(s) = \frac{K}{s^4(s+p)} \quad ; p > 0$$

Solución:

Como la trayectoria de Nyquist no debe pasar por los polos o ceros de $G(s)$, debemos modificar la trayectoria de Nyquist para que no pase por el origen de coordenadas, ya que la función de transferencia tiene un polo de orden cuatro en $s=0$.

La trayectoria de Nyquist a transformar mediante $G(s)$ es la mostrada en la figura 12.3.

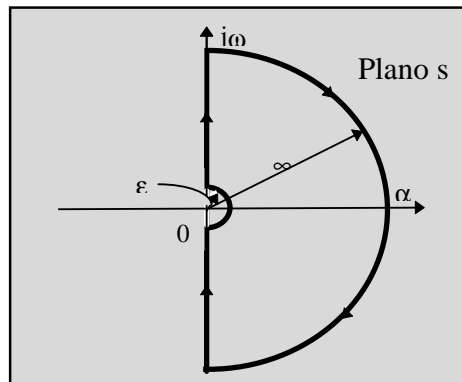


figura 12.3

El punto representativo s se desplaza a lo largo del eje imaginario negativo $j\omega$ desde $-j\infty$ hasta $j0_-$. El punto se mueve desde $s=j0_-$ hasta $s=j0_+$ a lo largo de un semicírculo de radio ϵ (infinitesimal) y luego a lo largo del eje imaginario positivo $j\omega$ desde $j0_+$ hasta $j\infty$. Desde $s=j\infty$ la trayectoria sigue un semicírculo de radio infinito y el punto representativo retorna al punto de partida $-j\infty$.

Realicemos las cuatro transformaciones:

Automática: problemas resueltos

- El eje imaginario positivo desde $j0_+$ hasta $j\infty$:

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^4(j\omega + p)} = \frac{K}{\omega^4(j\omega + p)} =$$

$$= \frac{Kp}{\omega^4 p^2 + \omega^6} - \frac{Kj}{\omega^3 p^2 + \omega^5} \quad ; p > 0$$

cuya parte real siempre es positiva y el signo de la parte imaginaria es negativo.

- El eje imaginario negativo desde $-j\infty$ hasta $j0_+$:

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^4(j\omega + p)} = \frac{K}{\omega^4(j\omega + p)} =$$

$$= \frac{Kp}{\omega^4 p^2 + \omega^6} - \frac{Kj}{\omega^3 p^2 + \omega^5} \quad ; p > 0$$

cuya parte real siempre es positiva y el signo de la parte imaginaria es positivo.

- La semicircunferencia infinitesimal:

$$G(s = \varepsilon e^{j\theta}) = \frac{K}{(\varepsilon e^{j\theta})^4(\varepsilon e^{j\theta} + p)}$$

donde:

$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ y } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right]$$

por lo que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(s = \varepsilon e^{j\theta}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{(\varepsilon e^{j\theta})^4(\varepsilon e^{j\theta} + p)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{(\varepsilon e^{j\theta})^4 p} = \frac{K\varepsilon^{-4} e^{-4j\theta}}{p}$$

es decir, al variar θ desde $-\pi/2$ hasta $\pi/2$, el ángulo de $G(s)$ varía dando dos circunferencias completas en sentido horario y de radio infinito.

- La semicircunferencia infinita:

98.- Utilizando el diagrama de Nyquist, analizar el sistema de realimentación unitaria cuya función de transferencia de lazo abierto es:

$$G(s) = \frac{K(T_2s + 1)}{s^2(T_1s + 1)}$$

Solución:

Como la trayectoria de Nyquist no debe pasar por los polos o ceros de $G(s)$, debemos modificar la trayectoria de Nyquist para que no pase por el origen de coordenadas, ya que la función de transferencia tiene un polo en $s=0$.

La trayectoria de Nyquist a transformar mediante $G(s)$ es la mostrada en la figura 12.3.

El punto representativo s se desplaza a lo largo del eje imaginario negativo $j\omega$ desde $-j\infty$ hasta $j0_-$. El punto se mueve desde $s=j0_-$ hasta $s=j0_+$ a lo largo de un semicírculo de radio ε (infinitesimal) y luego a lo largo del eje imaginario positivo $j\omega$ desde $j0_+$ hasta $j\infty$. Desde $s=j\infty$ la trayectoria sigue un semicírculo de radio infinito y el punto representativo retorna al punto de partida $-j\infty$.

Realicemos las cuatro transformaciones:

- El eje imaginario positivo desde $j0_+$ hasta $j\infty$:

$$\begin{aligned} G(s = j\omega) &= \frac{K(T_2j\omega + 1)}{(j\omega)^2(T_1j\omega + 1)} = \frac{K(T_2j\omega + 1)}{-\omega^2(T_1j\omega + 1)} = \\ &= K\left(-\frac{T_1T_2\omega^2 + 1}{\omega^2 + T_1^2\omega^4} + j\frac{T_1 - T_2}{\omega + T_1^2\omega^3}\right) \end{aligned}$$

cuya parte imaginaria se anula cuando $T_1=T_2$ y su signo depende de la diferencia entre ambos.

- El eje imaginario negativo desde $j\infty$ hasta $j0_+$:

$$G(s = j\omega) = \frac{K(T_2 j\omega + 1)}{(j\omega)^2 (T_1 j\omega + 1)} = \frac{K(T_2 j\omega + 1)}{-\omega^2 (T_1 j\omega + 1)} =$$

$$= K\left(-\frac{T_1 T_2 \omega^2 + 1}{\omega^2 + T_1^2 \omega^4} + j \frac{T_1 - T_2}{\omega + T_1^2 \omega^3}\right)$$

cuya parte imaginaria se anula cuando $T_1 = T_2$.

- La semicircunferencia infinitesimal:

$$G(s = \varepsilon e^{j\theta}) = \frac{K(T_2 \varepsilon e^{j\theta} + 1)}{(\varepsilon e^{j\theta})^2 (T_1 \varepsilon e^{j\theta} + 1)}$$

donde:

$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ y } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

por lo que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(s = \varepsilon e^{j\theta}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K(T_2 \varepsilon e^{j\theta} + 1)}{(\varepsilon e^{j\theta})^2 (T_1 \varepsilon e^{j\theta} + 1)} \approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\varepsilon^2 e^{2j\theta}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K \varepsilon^{-2} e^{-2j\theta}$$

es decir, al variar θ desde $-\pi/2$ hasta $\pi/2$, el ángulo de $G(s)$ varía desde π hasta $-\pi$, dando una vuelta completa con radio infinito y en sentido horario.

- La semicircunferencia infinita:

$$G(s = R e^{j\theta}) = \frac{K(T_2 R e^{j\theta} + 1)}{(R e^{j\theta})^2 (T_1 R e^{j\theta} + 1)}$$

donde:

$$R \rightarrow \infty \text{ y } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

por lo que:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} G(s = R e^{j\theta}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{K(T_2 R e^{j\theta} + 1)}{(R e^{j\theta})^2 (T_1 R e^{j\theta} + 1)} \approx \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{K}{R^2 e^{2j\theta}} =$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} K R^{-2} e^{-2j\theta} = 0$$

es decir, al variar θ desde $-\pi/2$ hasta $\pi/2$, el ángulo de $G(s)$ varía desde π hasta $-\pi$, pero con radio nulo.

Si $T1 < T2$, la parte imaginaria de $G(j0_+)$ es negativa y la trayectoria de Nyquist es la mostrada en la figura 12.5, que no rodea al punto -1 ($N=0$) y la trayectoria de Nyquist no contiene en su interior ningún polo de $G(s)$ ($P=0$), por lo que $Z=N+P=0$ y podemos afirmar que el sistema es estable.

Si $T1 > T2$, la parte imaginaria de $G(j0_+)$ es positiva y la trayectoria de Nyquist es la mostrada en la figura 12.6, que rodea en sentido horario dos veces al punto -1 ($N=2$) y la trayectoria de Nyquist no contiene en su interior ningún polo de $G(s)$ ($P=0$), por lo que $Z=N+P=2$ y podemos afirmar que el sistema es inestable.

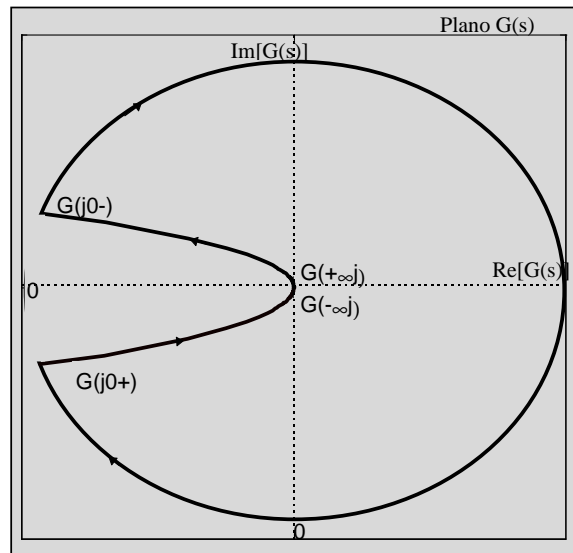


figura 12.5

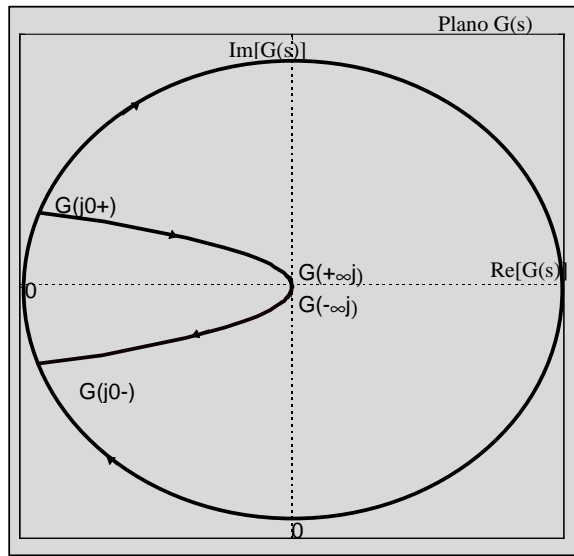


figura 12.6

99.- Considerar el sistema con función de transferencia de lazo abierto:

$$G(s)H(s) = \frac{10K(s+0.5)}{s^2(s+2)(s+10)}.$$

Aplicar el criterio de estabilidad de Nyquist para determinar la estabilidad del sistema para valores de K grandes y pequeños.

Solución:

La trayectoria de Nyquist que debemos transformar mediante la función $G(s)H(s)$ es la mostrada en la figura 12.3, donde hay que realizar cuatro tipos de transformaciones.

Realicémoslas:

- El eje imaginario positivo desde $j0_+$ hasta $j\infty$:

$$\begin{aligned} G(s=j\omega)H(s=j\omega) &= \frac{10K(j\omega+0.5)}{(j\omega)^2(j\omega+2)(j\omega+10)} = \\ &= \frac{10K(j\omega+0.5)}{-\omega^2(-\omega^2+12j\omega+20)} = \frac{10K(j\omega+0.5)}{\omega^4-20\omega^2-12j\omega^3} = \\ &= \frac{10K(j\omega+0.5)(\omega^4-20\omega^2+12j\omega^3)}{(\omega^4-20\omega^2-12j\omega^3)(\omega^4-20\omega^2+12j\omega^3)} = \\ &= \frac{10K[(-11.5\omega^4-10\omega^2)+j(\omega^5-14\omega^3)]}{(\omega^4-20\omega^2)^2+(12\omega^3)^2} \end{aligned}$$

cuya parte imaginaria se anula cuando:

$$\omega_1 = \sqrt{14}$$

y para esta frecuencia el modulo de $G(s)$ toma la forma:

$$|GH(s=j\omega_1)| = \frac{10K(11.5\omega^4+10\omega^2)}{(\omega^4-20\omega^2)^2+(12\omega^3)^2} = 0.059K$$

- El eje imaginario negativo desde $-j\infty$ hasta $j0_+$:

$$\begin{aligned}
G(s = j\omega)H(s = j\omega) &= \frac{10K(j\omega + 0.5)}{(j\omega)^2(j\omega + 2)(j\omega + 10)} = \\
&= \frac{10K(j\omega + 0.5)}{-\omega^2(-\omega^2 + 12j\omega + 20)} = \frac{10K(j\omega + 0.5)}{\omega^4 - 20\omega^2 - 12j\omega^3} = \\
&= \frac{10K(j\omega + 0.5)(\omega^4 - 20\omega^2 + 12j\omega^3)}{(\omega^4 - 20\omega^2 - 12j\omega^3)(\omega^4 - 20\omega^2 + 12j\omega^3)} = \\
&= \frac{10K(-11.5\omega^4 - 10\omega^2) + j(\omega^5 - 14\omega^3)}{(\omega^4 - 20\omega^2)^2 + (12\omega^3)^2}
\end{aligned}$$

cuya parte imaginaria se anula cuando:

$$\omega_1 = \sqrt{14}$$

y para esta frecuencia el modulo de $G(s)$ toma la forma:

$$|GH(s = j\omega_1)| = \frac{10K(11.5\omega^4 + 10\omega^2)}{(\omega^4 - 20\omega^2)^2 + (12\omega^3)^2} = 0.059K$$

- La semicircunferencia infinitesimal:

$$GH(s = \varepsilon e^{j\theta}) = \frac{10K(\varepsilon e^{j\theta} + 0.5)}{(\varepsilon e^{j\theta})^2(\varepsilon e^{j\theta} + 2)(\varepsilon e^{j\theta} + 10)}$$

donde:

$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ y } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right]$$

por lo que:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} GH(s = \varepsilon e^{j\theta}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{10K(\varepsilon e^{j\theta} + 0.5)}{(\varepsilon e^{j\theta})^2(\varepsilon e^{j\theta} + 2)(\varepsilon e^{j\theta} + 10)} \approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{4(\varepsilon e^{j\theta})^2} = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K\varepsilon^{-2}e^{-j2\theta}}{4}
\end{aligned}$$

La semicircunferencia de sentido antihorario de radio ε se transforma en una circunferencia de sentido horario.

Automática: problemas resueltos

- La semicircunferencia infinita:

$$GH(s = \text{Re}^{j\theta}) = \frac{10K(\text{Re}^{j\theta} + 0.5)}{(\text{Re}^{j\theta})^2(\text{Re}^{j\theta} + 2)(\text{Re}^{j\theta} + 10)}$$

donde:

$$R \rightarrow \infty \text{ y } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right]$$

por lo que:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} GH(s = \text{Re}^{j\theta}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{10K(\text{Re}^{j\theta} + 0.5)}{(\text{Re}^{j\theta})^2(\text{Re}^{j\theta} + 2)(\text{Re}^{j\theta} + 10)} \approx \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{10K}{(\text{Re}^{j\theta})^4} = 0$$

Toda la semicircunferencia de radio infinito se ha transformado en el origen del plano $G(s)$.

Agrupando estas cuatro transformaciones, podemos afirmar que la trayectoria de Nyquist se transforma en la curva mostrada en la figura 12.7.

Si $0.059K < 1$ ($K < 17$) no hay rodeos en sentido horario alrededor del punto -1 en el plano $G(s)$ ($N=0$), según podemos ver en la figura 12.8 y no hay polos contenidos dentro de la trayectoria de Nyquist ($P=0$), luego si aplicamos el criterio de Nyquist, el sistema es estable ya que $Z=N+P=0$.

Si $0.059K > 1$ ($K > 17$) el número de rodeos en sentido horario alrededor del punto -1 en el plano $G(s)$ es dos ($N=2$) según podemos ver en la figura 12.9, y no hay polos contenidos dentro de la trayectoria de Nyquist ($P=0$), luego si aplicamos el criterio de Nyquist, el sistema es inestable ya que $Z=N+P=2 > 0$.

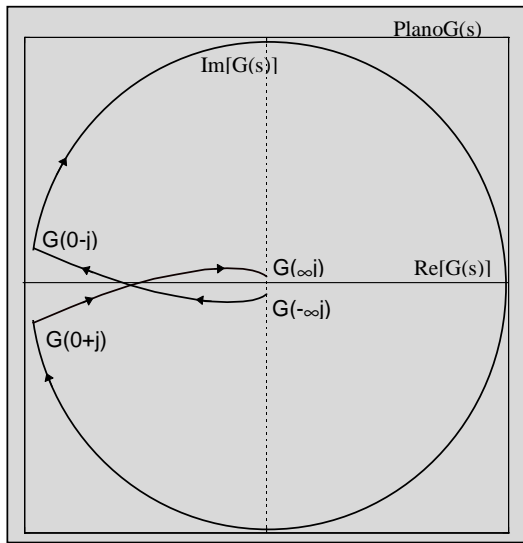


figura 12.7

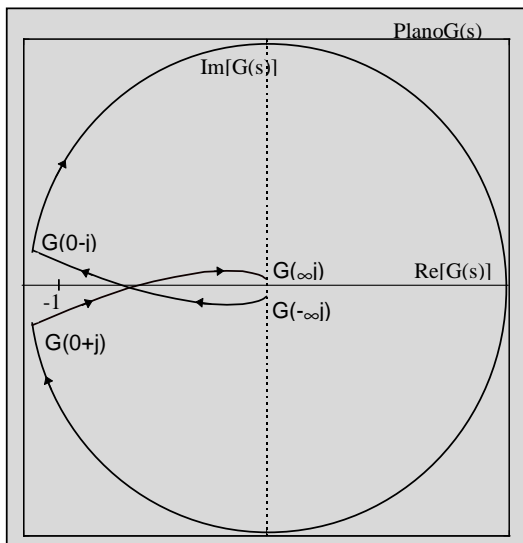


figura 12.8

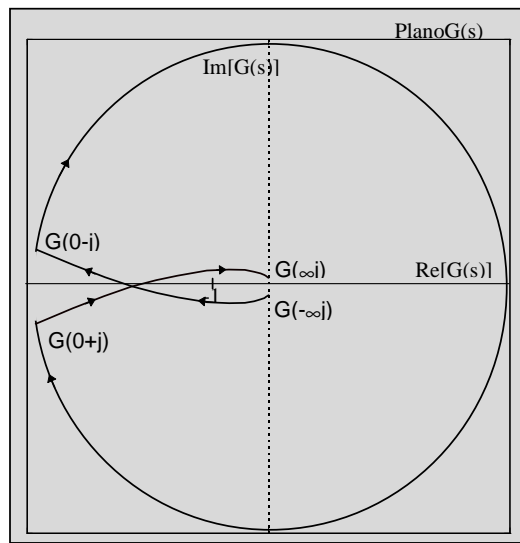


figura 12.9

100.- Determinar la estabilidad de un sistema de lazo cerrado que tiene la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{(s-1)s}; \quad k > 1$$

Solución:

La función de transferencia de lazo abierto tiene un polo en el origen y otro en $s=1$ por lo que cuando apliquemos el criterio de estabilidad de Nyquist debemos tener en cuenta que $P=1$ y la trayectoria de Nyquist que debemos transformar mediante $G(s)H(s)$ es la mostrada en la figura 12.3.

Consta de cuatro tramos que debemos transformar mediante $G(s)H(s)$.

- Eje $j\omega$ desde 0_+ hasta ∞j :

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K(j\omega+3)}{(j\omega-1)j\omega} = -\frac{K4\omega}{\omega^3+\omega} - \frac{K(\omega^2-3)j}{\omega^3+\omega}$$

La parte imaginaria se anula cuando $\omega^2-3=0$, es decir cuando $\omega = \sqrt{3}$ por lo que el módulo de $G(s)$ para esa frecuencia es:

$$|G(j\sqrt{3})H(j\sqrt{3})| = \left| \frac{K4\omega}{\omega^3+\omega} \right| = K$$

- Eje $j\omega$ desde $-\infty j$ hasta $j0$:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K(j\omega+3)}{(j\omega-1)j\omega} = -\frac{K4\omega}{\omega^3+\omega} - \frac{K(\omega^2-3)j}{\omega^3+\omega}$$

La parte imaginaria se anula cuando $\omega^2-3=0$, es decir cuando $\omega = \sqrt{3}$ por lo que el módulo de $G(s)$ para esa frecuencia es:

$$|G(j\sqrt{3})H(j\sqrt{3})| = \left| \frac{K4\omega}{\omega^3+\omega} \right| = K$$

- Semicircunferencia de radio infinito:

Automática: problemas resueltos

$$G(\operatorname{Re}^{j\omega})H(\operatorname{Re}^{j\omega}) = \frac{K(\operatorname{Re}^{j\omega} + 3)}{(\operatorname{Re}^{j\omega} - 1)\operatorname{Re}^{j\omega}}$$

donde:

$$R \rightarrow \infty \text{ y } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right]$$

por lo que:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} G(\operatorname{Re}^{j\omega})H(\operatorname{Re}^{j\omega}) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{K(\operatorname{Re}^{j\omega} + 3)}{(\operatorname{Re}^{j\omega} - 1)\operatorname{Re}^{j\omega}} = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{K(\operatorname{Re}^{j\omega})}{(\operatorname{Re}^{j\omega})\operatorname{Re}^{j\omega}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{K}{\operatorname{Re}^{j\omega}} = 0 \end{aligned}$$

La media circunferencia de radio infinito se transforma mediante $G(s)$ en el origen de coordenadas.

- Semicircunferencia de radio infinitesimal:

$$G(\varepsilon e^{j\omega})H(\varepsilon e^{j\omega}) = \frac{K(\varepsilon e^{j\omega} + 3)}{(\varepsilon e^{j\omega} - 1)\varepsilon e^{j\omega}}$$

donde:

$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ y } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right]$$

por lo que:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(\varepsilon e^{j\omega})H(\varepsilon e^{j\omega}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K(\varepsilon e^{j\omega} + 3)}{(\varepsilon e^{j\omega} - 1)\varepsilon e^{j\omega}} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{3K}{\varepsilon e^{j\omega}} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-3K\varepsilon^{-1}e^{-j\omega}) \end{aligned}$$

La media circunferencia de sentido antihorario y radio infinitesimal se transforma mediante $G(s)$ en media circunferencia de radio infinito en sentido horario.

Agrupando estas cuatro transformaciones, obtenemos que la transformación de la trayectoria de Nyquist de la figura tiene como resultado la curva del plano $G(s)$ mostrada en la figura 12.10, en donde la ubicación del punto de corte con el eje real respecto al punto -1 va a depender del valor que tome K .

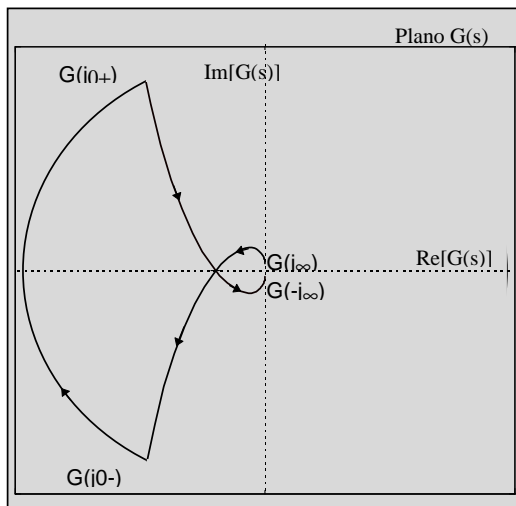


figura 12.10

Según hemos demostrado, el punto de corte con el eje real corresponde al valor de K , por lo que podemos deducir las siguientes conclusiones referentes a la estabilidad del sistema:

Si $K > 1$ la trayectoria en el plano $G(s)H(s)$ da una vuelta en sentido antihorario en torno al punto -1 ($N = -1$), por lo que $Z = N + P = 0$ y podemos afirmar que el sistema es estable (figura 12.11).

Si $K < 1$ la trayectoria en el plano $G(s)H(s)$ da una vuelta en sentido horario en torno al punto -1 ($N = 1$), por lo que $Z = N + P = 2$ y podemos afirmar que el sistema es inestable (figura 12.12).

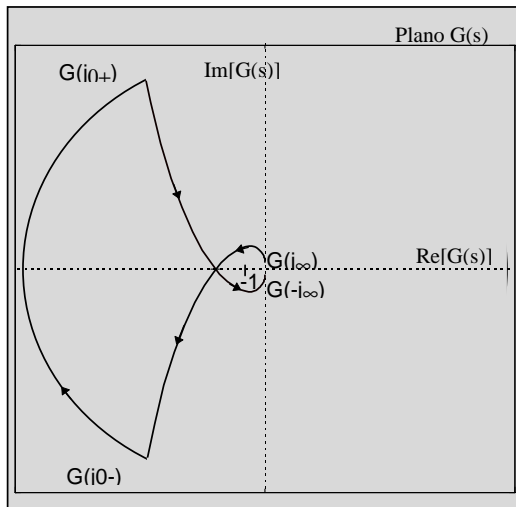


figura 12.11

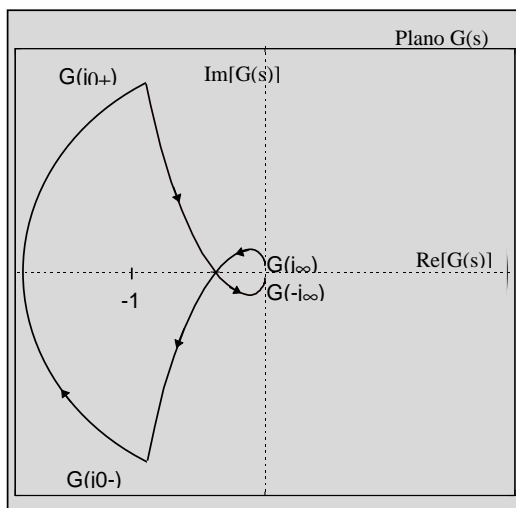


figura 12.12

101.- Determinar la estabilidad de un sistema de lazo cerrado que tiene la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}; \quad k > 0$$

Solución:

La trayectoria de Nyquist que debemos de transformar es la mostrada en la figura 12.3, ya que $G(s)$ tiene un polo en el origen.

Esta trayectoria consta de cuatro tramos a la hora de transformarla mediante $G(s)$:

- Eje $j\omega$ desde $j0_+$ hasta $j\infty$:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{K}{j\omega(T_1j\omega + 1)(T_2j\omega + 1)} = -\frac{K}{(T_1 + T_2)\omega^2 - (\omega - T_1T_2\omega^3)j} = \\ &= -\frac{K(T_1 + T_2)\omega^2}{(T_1 + T_2)^2\omega^4 + (\omega - T_1T_2\omega^3)^2} - \frac{K(\omega - T_1T_2\omega^3)j}{(T_1 + T_2)^2\omega^4 + (\omega - T_1T_2\omega^3)^2} \end{aligned}$$

La parte imaginaria de $G(j\infty)$ se anula cuando:

$$K(\omega - T_1T_2\omega^3) = 0 \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$$

para este valor de la frecuencia, $G(j\omega_1)$ está cortando al eje real del plano $G(s)$ y con un valor dado por:

$$G(\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}) = -\frac{KT_1T_2}{T_1 + T_2}$$

- Eje $j\omega$ desde $-j\infty$ hasta $j0_-$:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{K}{j\omega(T_1j\omega + 1)(T_2j\omega + 1)} = -\frac{K}{(T_1 + T_2)\omega^2 - (\omega - T_1T_2\omega^3)j} = \\ &= -\frac{K(T_1 + T_2)\omega^2}{(T_1 + T_2)^2\omega^4 + (\omega - T_1T_2\omega^3)^2} - \frac{K(\omega - T_1T_2\omega^3)j}{(T_1 + T_2)^2\omega^4 + (\omega - T_1T_2\omega^3)^2} \end{aligned}$$

Automática: problemas resueltos

La parte imaginaria de $G(j\omega)$ se anula cuando:

$$K(\omega - T_1 T_2 \omega^3) = 0 \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

para cuyo valor de la frecuencia, $G(j\omega_1)$ está cortando al eje real del plano $G(s)$ con un valor dado por:

$$G(\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}) = -\frac{K T_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

- Semicircunferencia de radio infinito:

$$G(\text{Re}^{j\theta}) = \frac{K}{\text{Re}^{j\theta} (T_1 \text{Re}^{j\theta} + 1)(T_2 \text{Re}^{j\theta} + 1)}$$

donde:

$$R \rightarrow \infty \text{ y } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right]$$

por lo que:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} G(\text{Re}^{j\theta}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{K}{\text{Re}^{j\theta} (T_1 \text{Re}^{j\theta} + 1)(T_2 \text{Re}^{j\theta} + 1)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{K}{T_1 T_2 R^3 e^{j3\theta}} = 0$$

La media circunferencia de radio infinito se transforma mediante $G(s)$ en el origen de coordenadas.

- Semicircunferencia de radio infinitesimal:

$$G(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta} (T_1 \varepsilon e^{j\theta} + 1)(T_2 \varepsilon e^{j\theta} + 1)}$$

donde:

$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ y } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right]$$

por lo que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(\text{Re}^{j\theta}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta} (T_1 \varepsilon e^{j\theta} + 1)(T_2 \varepsilon e^{j\theta} + 1)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K \varepsilon^{-1} e^{-j\theta}$$

La media circunferencia de radio infinitesimal se transforma mediante $G(s)$ en media circunferencia de radio infinito en sentido horario.

Agrupando estas cuatro transformaciones, obtenemos que la transformación de la trayectoria de Nyquist de la figura tiene como resultado la curva del plano $G(s)$ mostrada en la figura 12.13, en donde la ubicación del punto de corte con el eje real respecto al punto -1 depende del valor que tome K .

Así:

Si

$$K < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$$

la trayectoria no da vueltas en torno al punto -1 como muestra la figura 12.14, ya que el módulo de $G(s)$ cuando corta al eje real es menor que la unidad, por lo que $N=0$ y como $P=0$ podemos afirmar que el sistema es estable, ya que $Z=P+N=0$.

Si

$$K > \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$$

la trayectoria da dos vueltas en torno al punto -1 como muestra la figura 12.15, ya que el módulo de $G(s)$ cuando corta al eje real es mayor que la unidad, por lo que $N=2$ y como $P=0$, podemos afirmar que el sistema es inestable, ya que $Z=P+N=2$ y es distinto de cero.

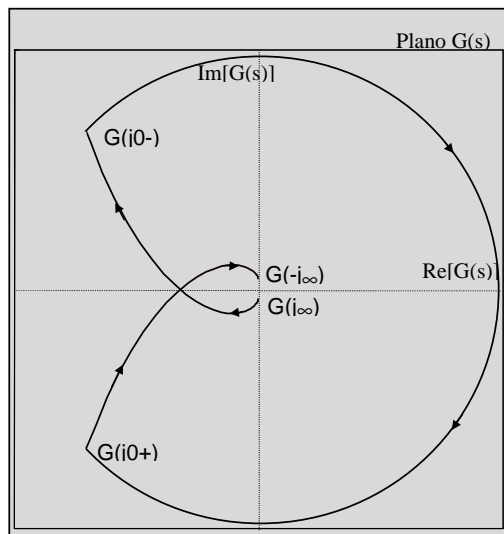


figura 12.13

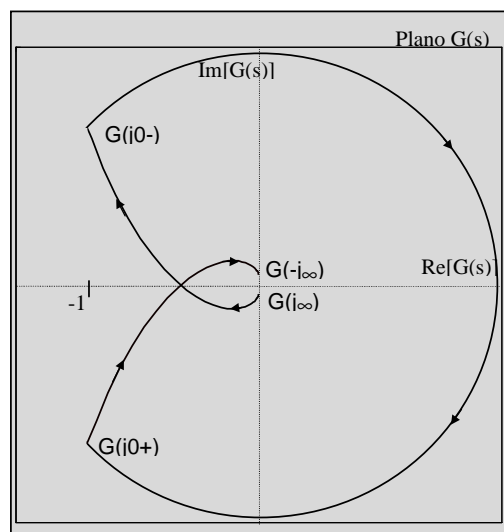


figura 12.14

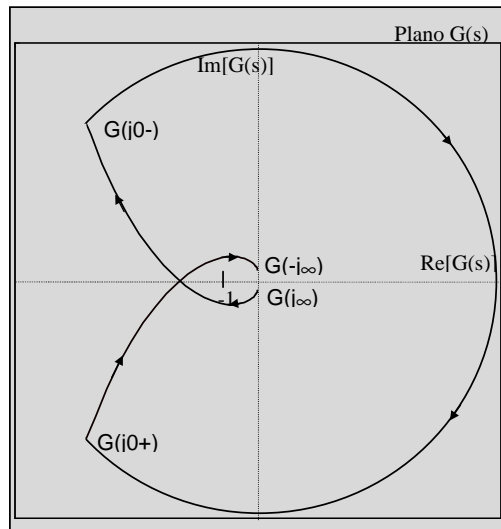


figura 12.15

102.- Analizar, para los diferentes valores de K y a, la estabilidad del sistema de lazo cerrado cuya función de transferencia de lazo abierto es:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+a)s^2}.$$

Solución:

La trayectoria de Nyquist que debemos transformar es la mostrada en la figura 12.3 que consta de cuatro tramos bien diferenciados:

- El eje $j\omega$ desde 0_+ hasta $j\infty$:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega+a)(j\omega)^2} = -\frac{aK\omega^2}{(a\omega^2)^2 + \omega^6} + \frac{K\omega^3 j}{(a\omega^2)^2 + \omega^6}$$

- El eje $j\omega$ desde $-j\infty$ hasta 0_- :

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega+a)(j\omega)^2} = -\frac{aK\omega^2}{(a\omega^2)^2 + \omega^6} + \frac{K\omega^3 j}{(a\omega^2)^2 + \omega^6}$$

- La semicircunferencia de radio infinito:

$$G(s = \text{Re}^{j\theta})H(s = \text{Re}^{j\theta}) = \frac{K}{(\text{Re}^{j\theta} + a)(\text{Re}^{j\theta})^2}$$

donde:

$$R \rightarrow \infty \text{ y } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right]$$

por lo que:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} G(s = \text{Re}^{j\theta})H(s = \text{Re}^{j\theta}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{K}{(\text{Re}^{j\theta} + a)(\text{Re}^{j\theta})^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{K}{(\text{Re}^{j\theta})^3} = 0$$

que se corresponde con el origen de coordenadas.

- La semicircunferencia de radio infinitesimal:

$$G(s = \epsilon e^{j\theta})H(s = \epsilon e^{j\theta}) = \frac{K}{(\epsilon e^{j\theta} + a)(\epsilon e^{j\theta})^2}$$

donde:

$$\epsilon \rightarrow 0 \text{ y } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right]$$

por lo que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(s = \epsilon e^{j\theta})H(s = \epsilon e^{j\theta}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K}{(\epsilon e^{j\theta} + a)(\epsilon e^{j\theta})^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K(\epsilon^{-2} e^{-2j\theta})}{a}$$

que corresponde a una circunferencia de radio infinito en sentido horario.

Con los diferentes valores de K y a podemos tener cuatro casos:

Caso 1:

Si $K > 0$ y $a > 0$, el diagrama de Nyquist que obtenemos a partir de las cuatro transformaciones mencionadas, es el mostrado en la figura 12.16. Como $N=2$ y $P=0$ tenemos que $Z=N+P=2$ distinto de cero por lo que el sistema es inestable (N es el número de vueltas alrededor del punto -1 , y P es el número de polos de $G(s)H(s)$ dentro de la trayectoria de Nyquist).

Caso 2:

Si $K > 0$ y $a < 0$, el diagrama de Nyquist que obtenemos a partir de las cuatro transformaciones, es el mostrado en la figura 12.17. Como $N=1$ y $P=1$ tenemos que $Z=N+P=2$ y el sistema es inestable.

Caso 3:

Si $K < 0$ y $a > 0$, el diagrama de Nyquist que obtenemos a partir de las cuatro transformaciones, es el mostrado en la figura 12.18. Como $N=1$ y $P=0$ tenemos que $Z=N+P=1$ y el sistema es inestable.

Caso 4:

Si $K < 0$ y $a < 0$, el diagrama de Nyquist que obtenemos a partir de las cuatro transformaciones mencionadas, es el mostrado en la figura 12.19. Como $N=0$ y $P=1$ tenemos que $Z=N+P=1$ y el sistema es inestable.

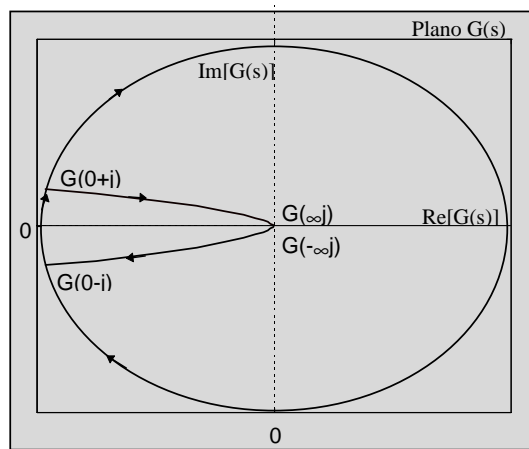


figura 12.16

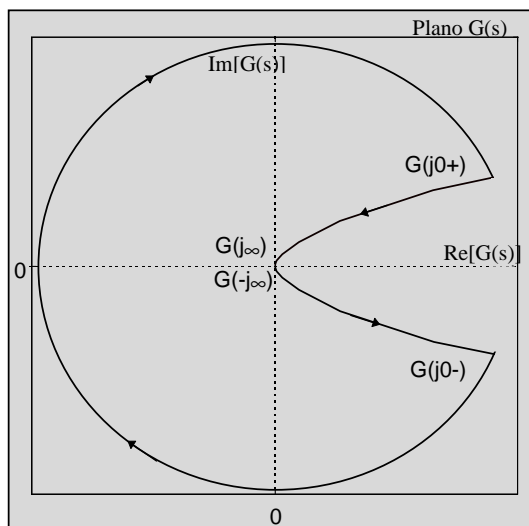


figura 12.17

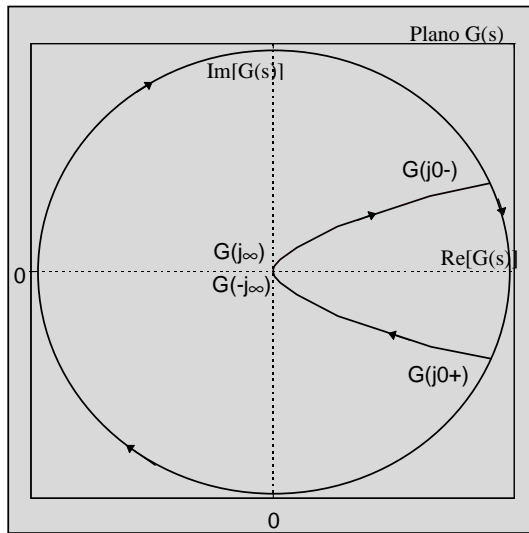


figura 12.18

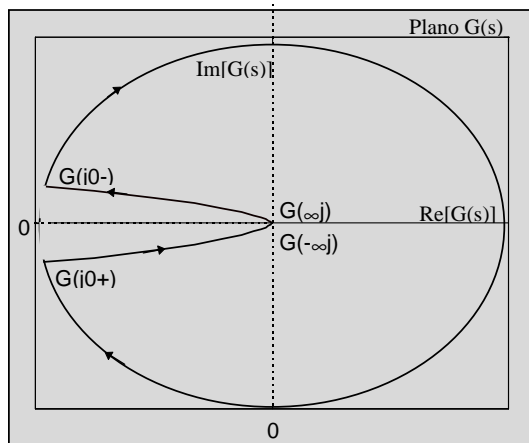


figura 12.19

103.- Analizar, utilizando el criterio de Nyquist, la estabilidad del sistema cuya función de transferencia en bucle abierto es:

$$G(s) = \frac{K}{(s^2 + 1)}$$

Solución:

La función de transferencia de lazo abierto posee dos polos ubicados en el eje imaginario, por lo que la trayectoria de Nyquist que debemos de transformar mediante $G(s)$ no puede pasar por ellos y debe tomar la forma mostrada en la figura 12.20, donde las semicircunferencias que bordean los polos tienen radio que tiende a cero.

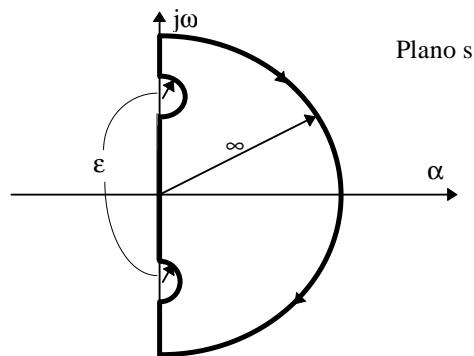


figura 12.20

La trayectoria de Nyquist consta en este caso de 6 tramos que debemos de transformar mediante $G(s)$.

Los tres que están incluidos en el eje imaginario $j\omega$ son:

Eje $j\omega$ desde j_+ hasta ∞j

Eje $j\omega$ desde $-\infty j$ hasta $-j_+$

Eje $j\omega$ desde $-j_-$ hasta j_-

y se transforman mediante $G(s)$ de la siguiente forma:

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2 + 1} = \frac{K}{1 - \omega^2}$$

que se corresponde con un número real cuyo signo depende del valor de ω .

Semicircunferencia de radio infinito:

En este caso la transformación toma la siguiente forma:

$$G(\text{Re}^{j\theta}) = \frac{K}{(\text{Re}^{j\theta})^2 + 1}$$

donde:

$$R \rightarrow \infty \text{ y } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right]$$

por lo que:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} G(\text{Re}^{j\theta}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{K}{(\text{Re}^{j\theta})^2 + 1} = 0$$

es decir, la semicircunferencia de radio infinito se transforma mediante $G(s)$ en el origen de coordenadas.

Semicircunferencia de radio infinitesimal en torno al punto j :

En este caso la transformación toma la siguiente forma:

$$G(j + \varepsilon e^{j\theta}) = \frac{K}{(j + \varepsilon e^{j\theta})^2 + 1}$$

donde:

$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ y } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right]$$

por lo que:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(j + \varepsilon e^{j\theta}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{(j + \varepsilon e^{j\theta})^2 + 1} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{(-1 + \varepsilon^2 e^{j2\theta} + 2j\varepsilon e^{j\theta} + 1)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{(\varepsilon^2 e^{j2\theta} + 2j\varepsilon e^{j\theta})} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta} (\varepsilon e^{j\theta} + 2j)} \cdot 0 = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta} 2j} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-j\varepsilon^{-1} e^{-j\theta})
 \end{aligned}$$

que nos indica que la semicircunferencia de sentido antihorario en torno al punto j se transforma mediante $G(s)$ en otra semicircunferencia de radio infinito y de sentido horario.

Semicircunferencia de radio infinitesimal en torno al punto $-j$:

Este caso es similar al anterior y obtenemos que se transforma en otra semicircunferencia de sentido horario.

Uniando las seis transformaciones obtenemos que la trayectoria de Nyquist se transforma mediante $G(s)$ en la curva mostrada en la figura 12.21, donde podemos observar que para cualquier valor de K , la trayectoria en el plano $G(s)$ da una vuelta completa en sentido horario en torno al punto -1 , por lo que $N=1$. Como $P=0$ y $Z=P+N=1$, podemos afirmar que el sistema es siempre inestable para cualquier valor de K .

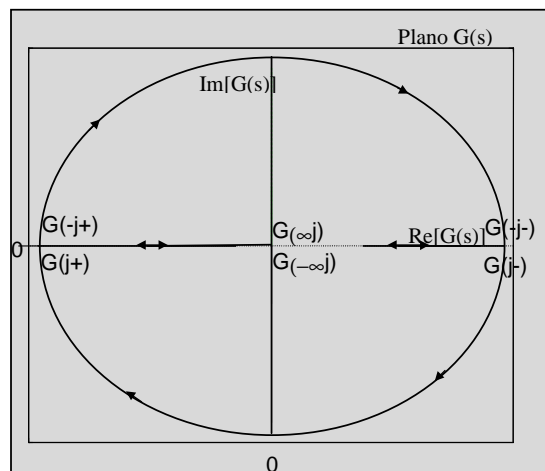


figura 12.21

104.- Analizar, utilizando el criterio de Nyquist, la estabilidad del sistema cuya función de transferencia en bucle abierto es:

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 1)^2}$$

Solución:

La función de transferencia de lazo abierto posee cinco polos y todos ellos están ubicados en el eje imaginario, por lo que la trayectoria de Nyquist que debemos de transformar mediante $G(s)$ no puede pasar por ellos y debe tomar la forma mostrada en la figura 12.22, donde las semicircunferencias que bordean los polos tienen radio que tiende a cero.

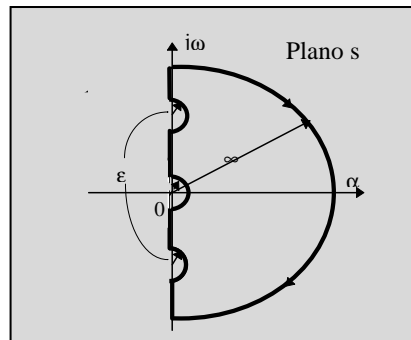


figura 12.22

La trayectoria de Nyquist consta en este caso de 8 tramos que debemos de transformar mediante $G(s)$:

- Los cuatro que están incluidos en el eje imaginario $j\omega$ son:

Eje $j\omega$ desde $j0_+$ hasta j_+

Eje $j\omega$ desde j_+ hasta ∞j

Eje $j\omega$ desde $-\infty j$ hasta $-j_+$

Eje $j\omega$ desde $-j_+$ hasta $j0_-$

y se transforman mediante $G(s)$ de la siguiente forma:

Automática: problemas resueltos

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega((j\omega)^2 + 1)^2} = -\frac{j}{\omega(1 - \omega^2)^2}$$

que se corresponde con un número imaginario puro.

- La semicircunferencia de radio infinito. En este caso la transformación toma la siguiente forma:

$$G(\text{Re}^{j\theta}) = \frac{K}{\text{Re}^{j\theta}((\text{Re}^{j\theta})^2 + 1)^2}$$

donde:

$$R \rightarrow \infty \text{ y } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right]$$

por lo que:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} G(\text{Re}^{j\theta}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{K}{\text{Re}^{j\theta}((\text{Re}^{j\theta})^2 + 1)^2} = 0$$

es decir, la semicircunferencia de radio infinito se transforma mediante $G(s)$ en el origen de coordenadas.

- La semicircunferencia de radio infinitesimal en torno al origen. En este caso la transformación toma la siguiente forma:

$$G(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta}((\varepsilon e^{j\theta})^2 + 1)^2}$$

donde:

$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ y } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right]$$

por lo que:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(\varepsilon e^{j\theta}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta}((\varepsilon e^{j\theta})^2 + 1)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta}((\varepsilon e^{j\theta})^2 + 1)^2} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K \varepsilon^{-1} e^{-j\theta} \end{aligned}$$

que nos indica que la media circunferencia de sentido antihorario en torno al origen se transforma mediante $G(s)$ en otra media circunferencia de radio infinito y de sentido horario.

- La semicircunferencia de radio infinitesimal en torno al punto j . En este caso la transformación toma la siguiente forma:

$$G(j + \varepsilon e^{j\theta}) = \frac{K}{(j + \varepsilon e^{j\theta})((j + \varepsilon e^{j\theta})^2 + 1)^2}$$

donde:

$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ y } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right]$$

por lo que:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(j + \varepsilon e^{j\theta}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{(j + \varepsilon e^{j\theta})((j + \varepsilon e^{j\theta})^2 + 1)^2} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{(j + \varepsilon e^{j\theta})(-1 + \varepsilon^2 e^{j2\theta} + 2j\varepsilon e^{j\theta} + 1)^2} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-K}{j(4\varepsilon^2 e^{j2\theta})} \end{aligned}$$

que nos indica que la media circunferencia de sentido antihorario en torno al punto j se transforma mediante $G(s)$ en una circunferencia de radio infinito y de sentido horario.

- La semicircunferencia de radio infinitesimal en torno al punto $-j$. Este caso es similar al anterior y obtenemos que se transforma en otra circunferencia de sentido horario.

Uniendo las ocho transformaciones obtenemos que la trayectoria de Nyquist se transforma mediante $G(s)$ en la curva mostrada en la figura 12.23 donde podemos observar que para cualquier valor de K , la trayectoria en el plano $G(s)$ da dos vueltas completas en sentido horario en torno al punto -1 por lo que $N=2$. Como $P=0$ y $Z=P+N=2$, podemos afirmar que el sistema es siempre inestable para cualquier valor de K .

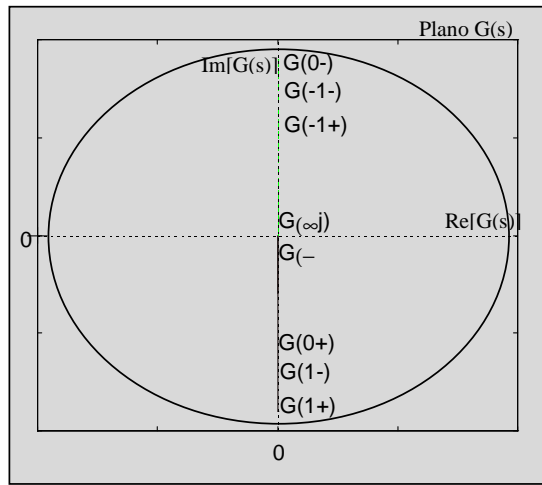


figura 12.23

105.- Un sistema de control de lazo cerrado con realimentación unitaria, presenta una función de transferencia de lazo abierto con un retardo en la forma:

$$G(s) = \frac{e^{-Ts}}{s(s+1)(s+2)}$$

Encontrar el valor límite del retraso T , tal que el sistema sea estable. Si $T=1$, calcular el margen de ganancia y el margen de fase.

Solución:

El límite de estabilidad lo encontraremos con las condiciones de módulo y fase dadas por:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= 1 \\ \angle(G(j\omega)) &= -180^\circ \end{aligned}$$

De la condición de módulo obtenemos que

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{e^{-Tj\omega}}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} \right| = \frac{1}{\sqrt{9\omega^4 + (2\omega - \omega^3)^2}} = 1$$

cuyas 6 soluciones son:

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &= \pm 1.97j \\ \omega_{3,4} &= \pm 1.13j \\ \omega_5 &= 0.44 \text{ rad / s} \\ \omega_6 &= -0.44 \end{aligned}$$

pero sólo ω_5 es válida por ser real y positiva.

La condición de fase se traduce en que:

$$\angle \frac{e^{-Tj\omega}}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} = -180^\circ$$

es decir:

Automática: problemas resueltos

$$-57.3T\omega - 90^\circ - \operatorname{arctg} \omega - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{2} \Big|_{\omega=\omega_s} = -180^\circ$$

por lo que $T=2.09s$ es el valor crítico de tiempo de retraso para que el sistema sea estable.

Si $T>2.09s$ el sistema es inestable y si $T<2.09s$ es estable.

Para obtener el diagrama de Nyquist, debemos transformar mediante $G(s)$ la trayectoria de Nyquist mostrada en la figura 12.1.

La transformación del eje $j\omega$ hace que:

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{e^{-Tj\omega}}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} \right| = \frac{1}{\sqrt{9\omega^4 + (2\omega - \omega^3)^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -57.3T\omega - 90^\circ - \operatorname{arctg} \omega - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{2}$$

Para $\omega=0$ el módulo tiende a infinito y la fase a -90° y cuando ω tiende a infinito, el módulo se va a cero y la fase a menos infinito.

El diagrama de Nyquist de $G(s)$ se muestra en la figura 12.24, donde observamos que para $T<2.09$ ($T=1.8$) el punto -1 queda fuera de la espiral ($N=0$) por lo que $Z=N+P=0$ y el sistema es estable. Por el contrario, si $T>2.09$ ($T=5$) el punto -1 queda dentro de la espiral ($N>0$) por lo que $Z>0$ y podemos afirmar que el sistema es inestable (figura 12.25). Si $T=2.09$ la trayectoria pasa por el punto -1 según vemos en la figura 12.26 y el sistema está al límite de la estabilidad.

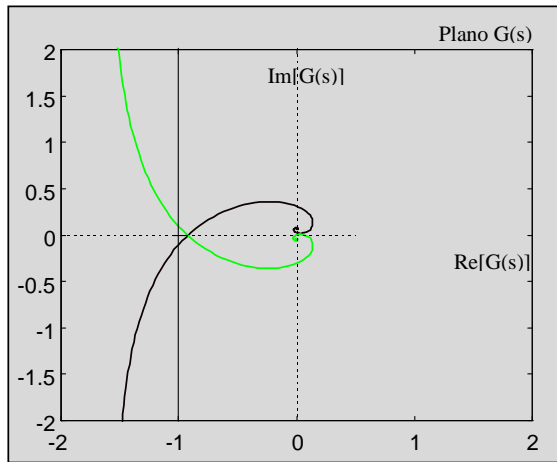


figura 12.24

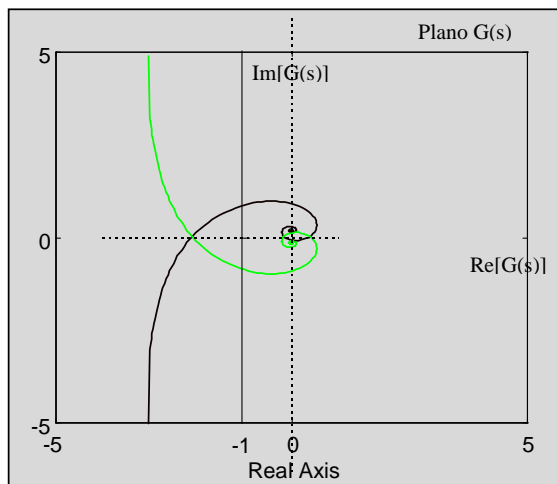


figura 12.25

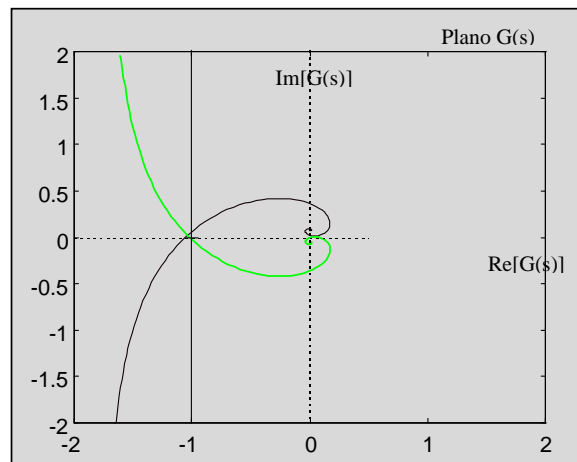


figura 12.26

Para calcular el margen de fase cuando $T=1$, debemos obtener cuanto le falta a la fase para valer -180° cuando el módulo de $G(j\omega)$ sea uno. Como esto se produce cuando $\omega_5=0.44\text{rad/s}$, obtenemos que el margen de fase es:

$$MF = \left[-57.3T\omega - 90^\circ - \arctg \omega - \arctg \frac{\omega}{2} \right]_{\omega=\omega_5} - 180^\circ = 28^\circ$$

Para el margen de ganancia debemos obtener cuanto le falta a la ganancia para valer 0 db cuando la fase este pasando por -180° .

La frecuencia para la cual la fase vale -180° se obtiene resolviendo la ecuación:

$$-57.3\omega - 90^\circ - \arctg \omega - \arctg \frac{\omega}{2} = -180^\circ$$

cuya solución es $\omega_7=0.66\text{rad/s}$.

Conociendo esta frecuencia, podemos obtener el margen de ganancia como:

$$MG = 20 \log_{10} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{9\omega_7^4 + (2\omega_7 - \omega_7^3)^2}} \right) = 4.43\text{db}$$

106.- Considerar el sistema con realimentación unitaria cuya función de transferencia de lazo abierto es:

$$G(s) = Ke^{-0.8s}/(s+1).$$

Utilizando el diagrama de Nyquist, determinar el valor crítico de K para la estabilidad.

Solución:

El límite de estabilidad lo encontraremos con las condiciones de módulo y fase dadas por:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= 1 \\ \angle(G(j\omega)) &= -180^\circ \end{aligned}$$

De la condición de módulo obtenemos que:

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{Ke^{-0.8j\omega}}{j\omega + 1} \right| = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2}} = 1$$

cuyas 2 soluciones son:

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{K^2 - 1} \text{ rad / s}$$

La condición de fase se traduce en que

$$\angle \frac{Ke^{-0.8j\omega}}{j\omega + 1} = -180^\circ$$

es decir:

$$-45.84\omega - \arctg \omega = -180^\circ$$

donde $\omega=2.45\text{rad/s}$ es el menor valor positivo que cumple dicha ecuación.

De la ecuación obtenemos que el valor crítico para la estabilidad es $K=2.65$.

Si $K>2.65$ el sistema es inestable y si $K<2.65$ es estable.

Para obtener el diagrama de Nyquist, debemos transformar mediante $G(s)$ la trayectoria de Nyquist mostrada en la figura 12.1.

La transformación del eje $j\omega$ hace que

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{Ke^{-Tj\omega}}{j\omega + 1} \right| = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -45.84\omega - \arctg \omega$$

Para $\omega=0$ el módulo es K y la fase -0° y cuando ω tiende a infinito, el modulo se va a cero y la fase a menos infinito.

El diagrama de Nyquist de $G(s)$ se muestra en la figura 12.27, donde observamos que para $K < 2.65$ ($K=1$) el punto -1 queda fuera de la espiral ($N=0$) por lo que $Z=N+P=0$ y el sistema es estable. Por el contrario, si $K > 2.65$ ($K=4$) el punto -1 queda dentro de la espiral ($N > 0$) por lo que $Z > 0$ y podemos afirmar que el sistema es inestable (figura 12.28). Si $K=2.65$ la trayectoria pasa por el punto -1 según vemos en la figura 12.29 y estamos al límite de la estabilidad.

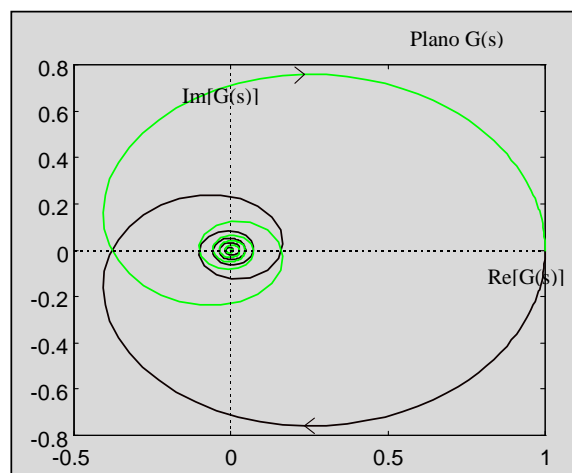


figura 12.27

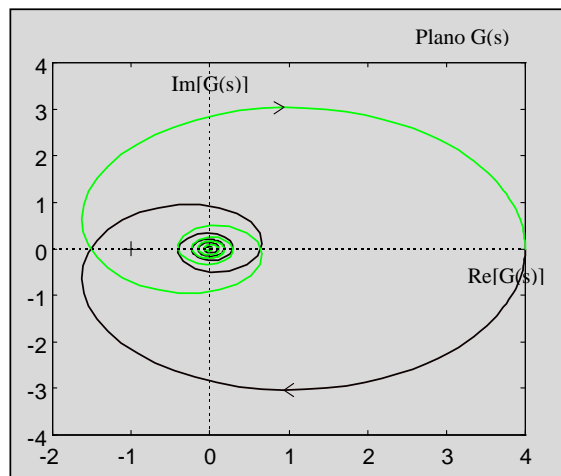


figura 12.28

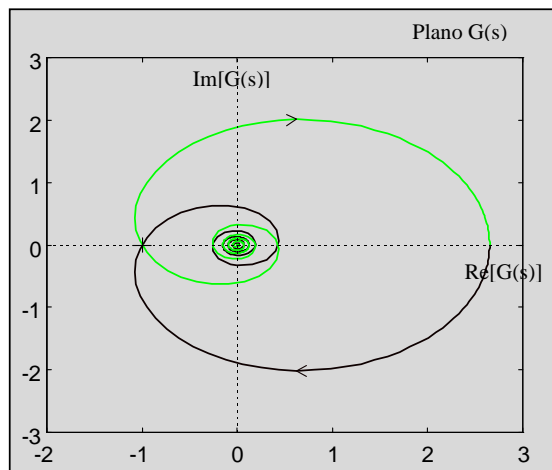


figura 12.29

107.- Analizar, utilizando el criterio de Nyquist, la estabilidad del sistema con realimentación unitaria y cuya función de transferencia en bucle abierto es:

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 1)^2(s^2 + 4)^3}$$

Solución:

La función de transferencia de lazo abierto posee once polos y todos ellos están ubicados en el eje imaginario, por lo que la trayectoria de Nyquist que debemos de transformar mediante $G(s)$ no puede pasar por ellos y debe tomar la forma mostrada en la figura, donde las semicircunferencias que bordean los polos tienen radio que tiende a cero.

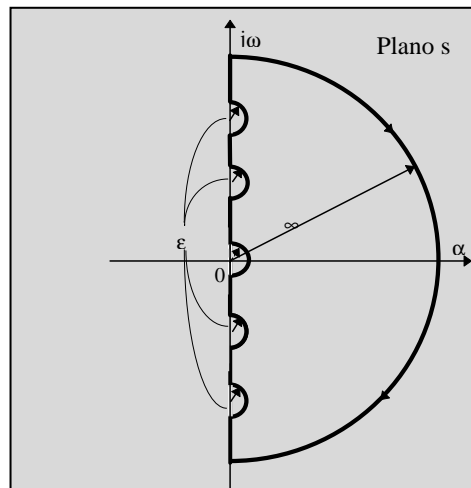


figura 12.30

La trayectoria de Nyquist consta en este caso de 12 tramos que debemos de transformar mediante $G(s)$.

- Los seis que están incluidos en el eje imaginario $j\omega$ son:
Eje $j\omega$ desde $j0_+$ hasta $j_.$

Eje $j\omega$ desde j_+ hasta $2j_+$.

Eje $j\omega$ desde $2j_+$ hasta ∞j_+ .

Eje $j\omega$ desde $-\infty j_+$ hasta $-2j_+$.

Eje $j\omega$ desde $-2j_+$ hasta $-j_+$.

Eje $j\omega$ desde $-j_+$ hasta $j0_+$.

y se transforman mediante $G(s)$ de la siguiente forma:

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega((j\omega)^2 + 1)^2((j\omega)^2 + 4)^3} = -\frac{jK}{\omega(1 - \omega^2)^2(4 - \omega^2)^3}$$

que se corresponde con un número imaginario puro para cualquier valor de ω y de donde obtenemos que:

| | | |
|----------------------|-----------------------|----------------------|
| $G(j0_+) = -j\infty$ | $G(j_-) = -j\infty$ | $G(j_+) = -j\infty$ |
| $G(j2_-) = -j\infty$ | $G(j2_+) = j\infty$ | $G(j\infty) = 0$ |
| $G(-j\infty) = 0$ | $G(-j2_+) = -j\infty$ | $G(-j2_-) = j\infty$ |
| $G(-j_-) = j\infty$ | $G(-j_+) = j\infty$ | $G(j0_-) = j\infty$ |

- La semicircunferencia de radio infinito:

En este caso la transformación toma la siguiente forma:

$$G(\text{Re}^{j\theta}) = \frac{K}{\text{Re}^{j\theta}((\text{Re}^{j\theta})^2 + 1)^2((\text{Re}^{j\theta})^2 + 4)^3}$$

donde:

$$R \rightarrow \infty \text{ y } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right]$$

por lo que:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} G(\text{Re}^{j\theta}) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{K}{\text{Re}^{j\theta}((\text{Re}^{j\theta})^2 + 1)^2((\text{Re}^{j\theta})^2 + 4)^3} = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{K}{\text{Re}^{j\theta}((\text{Re}^{j\theta})^2)^2((\text{Re}^{j\theta})^2)^3} = 0 \end{aligned}$$

Automática: problemas resueltos

es decir, la semicircunferencia de radio infinito se transforma mediante $G(s)$ en el origen de coordenadas.

- La semicircunferencia de radio infinitesimal en torno al origen:

En este caso la transformación toma la siguiente forma:

$$G(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta} ((\varepsilon e^{j\theta})^2 + 1)^2 ((\varepsilon e^{j\theta})^2 + 4)^3}$$

donde:

$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ y } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right]$$

por lo que:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(\text{Re}^{j\theta}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta} ((\varepsilon e^{j\theta})^2 + 1)^2 ((\varepsilon e^{j\theta})^2 + 4)^3} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta} (1)^2 (4)^3} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta} (1)^2 (4)^3} \end{aligned}$$

que nos indica que la media circunferencia de sentido antihorario en torno al origen se transforma mediante $G(s)$ en otra media circunferencia de radio infinito y de sentido horario.

- La semicircunferencia de radio infinitesimal en torno al punto j :

En este caso la transformación toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(\varepsilon e^{j\theta} + j) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{(\varepsilon e^{j\theta} + j)((\varepsilon e^{j\theta} + j)^2 + 1)^2 ((\varepsilon e^{j\theta} + j)^2 + 4)^3} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{(\varepsilon e^{j\theta} + j)(2j\varepsilon e^{j\theta} - 1 + \varepsilon^2 e^{j2\theta} + 1)^2 (2j\varepsilon e^{j\theta} - 1 + \varepsilon^2 e^{j2\theta} + 4)^3} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{(j)(2j\varepsilon e^{j\theta} + \varepsilon^2 e^{j2\theta})^2 (2j\varepsilon e^{j\theta} + \varepsilon^2 e^{j2\theta} + 3)^3} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K'}{\varepsilon^2 e^{j2\theta}} \end{aligned}$$

donde:

$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ y } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right].$$

- La media circunferencia de sentido antihorario en torno al punto j se transforma mediante $G(s)$ en una circunferencia de radio infinito y de sentido horario.

- La semicircunferencia de radio infinitesimal en torno al punto $-j$.

Este caso es similar al anterior y obtenemos que se transforma en otra circunferencia de sentido horario.

- La media circunferencia de sentido antihorario en torno al punto $2j$ se transforma de forma similar a las anteriores en una y media circunferencia de radio infinito y sentido horario al igual que la media circunferencia en torno al punto $-2j$.

Uniendo las doce transformaciones obtenemos que la trayectoria de Nyquist se transforma mediante $G(s)$ en la curva mostrada en la figura 12.31 donde podemos observar que para cualquier valor de K , la trayectoria en el plano $G(s)$ da 5 vueltas completas en sentido horario en torno al punto -1 por lo que $N=5$. Como $P=0$ y $Z=P+N=5$, podemos afirmar que el sistema es siempre inestable para cualquier valor de K .

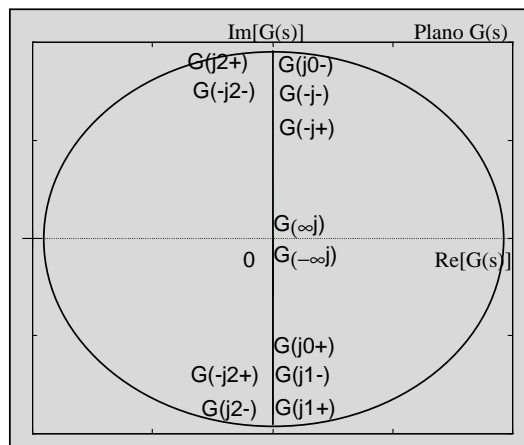


figura 12.31

Tema 13 :

Técnicas de diseño y compensación

108.- Diseñar una red compensadora para que un sistema con función de transferencia de lazo abierto

$$G(s) = \frac{5}{(s+1)^2(s+5)}$$

y realimentación unitaria tenga un margen de ganancia MG=20dB y un error de posición del 10%

Solución:

Para conseguir que el sistema cumpla las especificaciones del enunciado del problema, diseñaremos un compensador en atraso de modo que la función de transferencia del sistema compensado es:

$$G_c(s)G(s) = \frac{K}{\beta} \frac{(s + \frac{1}{T})}{(s + \frac{1}{T\beta})} \frac{5}{(s+1)^2(s+5)}$$

Para calcular K, T y β seguiremos los siguientes pasos:

a) Obtenemos la función de transferencia de lazo cerrado:

$$FTLC = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5K}{(s+1)^2(s+5) + 5K}$$

b) Calculamos la ganancia K del sistema sin compensar cuando el error de posición es del 10%. Para ello debemos de aplicar el teorema del valor final de la siguiente forma:

$$c(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \frac{5K}{(s+1)^2(s+5) + 5K}$$

donde $R(s)=1/s$ por lo que:

$$c(\infty) = \frac{5K}{5 + 5K} = \frac{K}{1 + K}$$

Como el valor de la entrada es uno, tenemos dos posibilidades:

$$c(\infty) = \frac{K}{1+K} = \begin{cases} 0.9 \\ 1.1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} K = 9 \\ K = -11 \end{matrix}$$

pero sólo la opción de $K=9$ es la correcta.

c) Obtenemos el diagrama de Bode del sistema sin compensar con una ganancia $K=9$, tal como muestra la figura 13.1 donde podemos comprobar que el margen de ganancia es de 4dB (frecuencia de cruce de fase de $\omega_0=3.3\text{rad/s}$), inferior a los 20dB de la especificación, por lo que debemos compensar el sistema en al menos 16dB aunque lo haremos en 18dB para mantener un rango de tolerancia en el comportamiento del sistema.

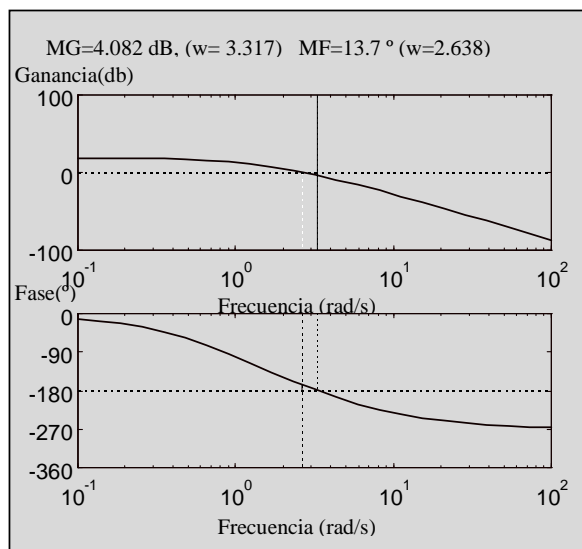


figura 13.1

d) Para compensar en atraso el sistema debemos usar un compensador que, por una parte no altere el diagrama de Bode a bajas frecuencias para que el error de posición no cambie demasiado ya que lo hemos fijado en el paso b, y por otra, que atenúe la curva de magnitud para altas frecuencias y aumente el margen de ganancia del sistema global. La atenuación debe de cumplir que:

$$20 \log \frac{1}{\beta} = -18 \text{ dB} \quad \Rightarrow \quad \beta = 8$$

e) Para que la atenuación que vamos a introducir no modifique la frecuencia de cruce de fase ω_o , tomaremos un valor de T dado por:

$$T = \frac{10}{\omega_o} = 3$$

f) La función de transferencia de la red compensadora tiene la forma:

$$G_c(s) = \frac{K}{\beta} \frac{(s + \frac{1}{T})}{(s + \frac{1}{T\beta})} = \frac{9}{7.1} \frac{(s + \frac{1}{3})}{(s + \frac{1}{21.3})} = 1.27 \frac{(s + 0.33)}{(s + 0.047)}$$

f) El nuevo diagrama de Bode del sistema compensado en atraso es el mostrado en la figura 13.1, donde observamos que el margen de ganancia es de 20.4dB, por lo que el sistema compensado cumple sobradamente las especificaciones de partida.

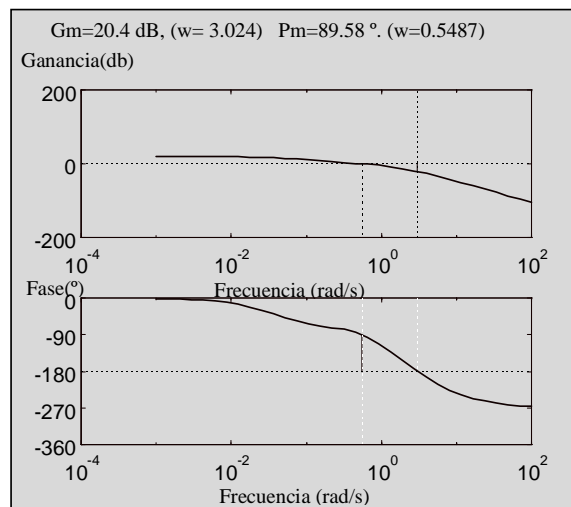


figura 13.2

109.- Sea un sistema con realimentación unitaria y cuya función de transferencia en lazo abierto es:

$$G(s) = \frac{1}{(2s+1)(s+1)(0.5s+1)}$$

Diseñar un compensador para el sistema, tal que la constante de error estático de posición sea $K_p = 9$ y el margen de fase sea mayor que 25° .

Solución:

Para conseguir que el sistema cumpla las especificaciones del enunciado del problema, diseñaremos un compensador en adelanto de modo que la función de transferencia del sistema compensado es:

$$G_c(s)G(s) = K \frac{(Ts+1)}{(\alpha Ts+1)} G(s) = K \frac{(Ts+1)}{(\alpha Ts+1)} \frac{1}{(s+1)(2s+1)(0.5s+1)}$$

Para calcular K, T y α seguiremos los siguientes pasos:

a) Calcular la ganancia K del sistema sin compensar para que $K_p=9$.

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} K \frac{1}{(s+1)(2s+1)(0.5s+1)} = K = 9 \Rightarrow K = 9$$

Necesitamos que $K=9$ para que $K_p=9$.

b) Obtenemos el diagrama de Bode del sistema sin compensar con una ganancia $K=9$, tal como muestra la figura 13.3 donde podemos comprobar que el margen de fase es de 7° , inferior a los 25° de la especificación, por lo que debemos compensar el sistema.

c) La red compensadora debe aportar una fase de:

$$\gamma = MF - MF' + \varepsilon = 25 - 7 + 5 = 23^\circ$$

donde MF es el margen de fase del sistema compensado, MF' es el del no compensado y ε es un margen extra de compensación.

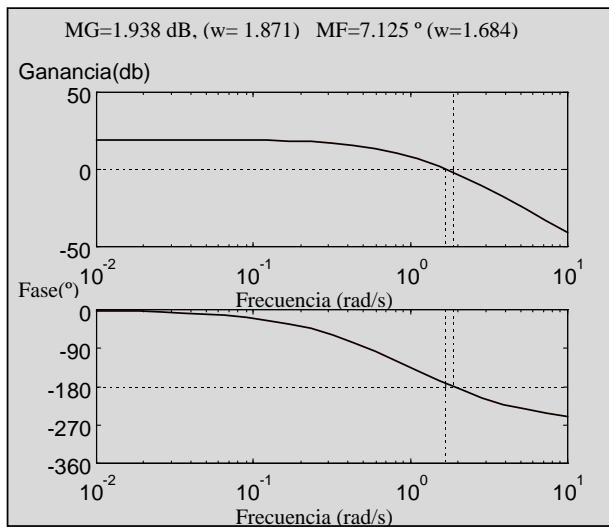


figura 13.3

d) Calculamos α como:

$$\alpha = \frac{1 - \text{sen } \gamma}{1 + \text{sen } \gamma} = 0.43.$$

y leemos en el diagrama de Bode de la figura 13.3 la frecuencia a la que la ganancia vale:

$$K_c = 20 \log \sqrt{\alpha} = -3.6 \text{ db}$$

que es la nueva frecuencia de cruce de ganancia, es decir $\omega_c = 2.1 \text{ rad/s}$ por lo que:

$$T = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\alpha}} \Rightarrow \frac{1}{T} = \omega_c \sqrt{\alpha} = 1.3 \text{ rad / s}$$

e) La función de transferencia de la red compensadora es:

$$G_c = \frac{K}{\alpha} \frac{(s + \frac{1}{T})}{(s + \frac{1}{\alpha T})} = \frac{9}{0.43} \frac{(s + 1.3)}{(s + 3)}$$

f) El nuevo diagrama de Bode del sistema compensado es el mostrado en la figura 13.4, donde observamos que el margen de fase es 17°, que es inferior a la especificación, por lo que debemos disminuir el valor de α añadiendo un compensador adicional de la forma $\alpha_1=0.1$ y $s=-1$ por lo que

$$G_d = \frac{1}{0.1} \frac{(s+1)}{(s+10)}$$

Con este último compensador, el diagrama de Bode es el mostrado en la figura 13.5, cuyo margen de fase es 34°, que ya sí cumple la especificación de partida.

Por tanto, la función de transferencia del sistema compensado es:

$$G_T(s)=G(s)G_c(s)G_d(s)$$

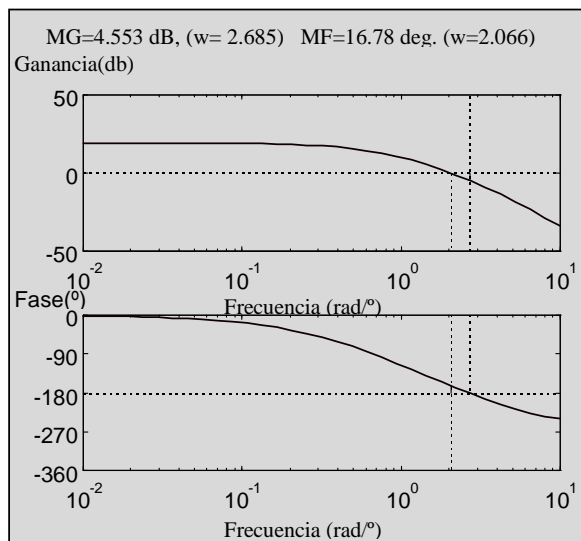


figura 13.4

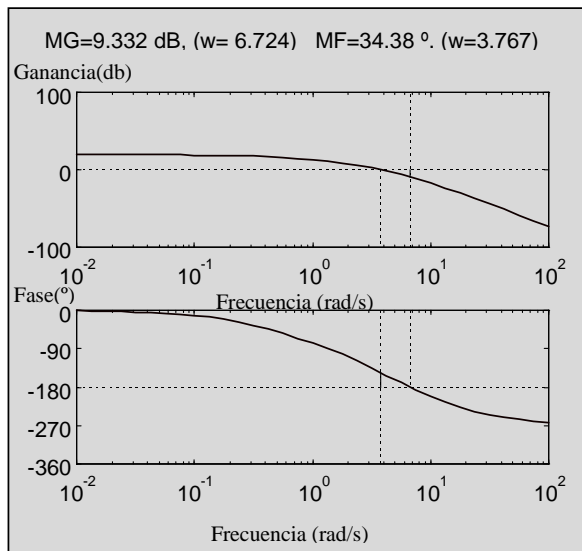


figura 13.5

110.- Un sistema de realimentación unitaria tiene por función de transferencia en bucle abierto:

$$G(s) = \frac{35}{s(s+1)(s+3)}$$

Diseñar un compensador, que introducido en la cadena directa, haga que el sistema cumpla las siguientes especificaciones:

Error estático de velocidad de 1.5s

Sobreimpulso máximo del 16%

Tiempo de respuesta de 4.5s

Solución:

Para conseguir que el sistema cumpla las especificaciones referentes al sobreimpulso máximo y tiempo de respuesta, debe de cumplirse que:

$$\begin{aligned} M_p &= e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0.16 & \Rightarrow & \quad \xi = 0.5 \\ t_r &= \frac{\pi}{\xi\omega_{nc}} = 4.5s & & \quad \omega_{nc} = 1.4rad/s \end{aligned}$$

donde ω_{nc} es la frecuencia natural no amortiguada y ξ es el factor de amortiguamiento correspondientes a los polos dominantes (s_{dc}) del sistema compensado consecuentemente, deben de estar ubicados en:

$$s_{dc} = -\omega_{nc}\xi \pm \omega_{nc}\sqrt{1-\xi^2} = -0.7 \pm 1.2j$$

Para ello, la red compensadora debe introducir un desfase de:

$$\varphi_c = -180 - (-120 - 76 - 27) = 43^\circ$$

que nos permite asegurar que el sistema compensado en adelante cumple la condición de fase para la construcción del lugar de las raíces. Para conseguirlo, ubicamos el cero de la red compensadora en $s=-1$ lo que obliga a que el polo esté en $s=-2.4$, es decir la red compensadora será:

$$G_C(s) = G_A \frac{s + \frac{1}{\alpha T}}{s + \frac{1}{T}} = G_A \frac{s+1}{s+2.4} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha &= 2.4 \\ T &= 0.42s \end{aligned}$$

La función de transferencia de lazo abierto del sistema compensado toma por tanto la forma:

$$G_T(s) = G_A \frac{(s+1)}{(s+2.4)} \frac{3.5}{s(s+1)(s+3)}$$

y como debe de cumplir la condición de magnitud:

$$G_T(s) \Big|_{s=-0.7+1.2j} = 1 \quad \Rightarrow \quad G_A \frac{1}{(s+2.4)} \frac{3.5}{s(s+3)} \Big|_{s=-0.7+1.2j} = 1$$

obtenemos que la ganancia debe de ser $G_A=2$.

Finalmente, debemos comprobar que el error estático de velocidad es de 1.5s. Para ello obtendremos el siguiente límite:

$$essv = 1 / K_V = 1 / \lim_{s \rightarrow 0} s G_A(s) = 1.06s$$

que es inferior al requerido en la especificación (1.5s), por lo que G_A cumple todos los requerimientos de partida.

111.- Sea un sistema con realimentación unitaria y cuya función de transferencia en lazo abierto es:

$$G(s) = \frac{0.2s^2 + 0.3s + 1}{(s^2 + 0.4s + 1)(s + 0.5)}$$

Diseñar un compensador para el sistema, tal que la constante de error estático de posición sea $K_p = 19$, el margen de fase sea mayor que 60° y el margen de ganancia sea superior a 10db.

Solución:

Para conseguir que el sistema cumpla las especificaciones del enunciado del problema, diseñaremos un compensador en adelanto de modo que la función de transferencia del sistema compensado es:

$$G_c(s)G(s) = K \frac{(Ts + 1)}{(\alpha Ts + 1)} G(s) = K \frac{(Ts + 1)}{(\alpha Ts + 1)} \frac{(0.2s^2 + 0.3s + 1)}{(s^2 + 0.4s + 1)(s + 0.5)}$$

Para calcular K, T y α seguiremos los siguientes pasos:

a) Calcular la ganancia K del sistema sin compensar cuando $K_p=19$.

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} K \frac{(0.2s^2 + 0.3s + 1)}{(s^2 + 0.4s + 1)(s + 0.5)} = \frac{K}{0.5} = 19 \Rightarrow K = 9.5.$$

Necesitamos que $K=9.5$ para que $K_p=19$.

b) Obtenemos el diagrama de Bode del sistema no compensado con una ganancia $K=9.5$, tal como muestra la figura 13.6 donde podemos comprobar que el margen de fase es de 8° , inferior a la especificación, por lo que debemos compensar el sistema.

c) La red compensadora debe aportar una fase de:

$$\gamma = MF - MF' + \varepsilon = 60 - 8 + 3 = 55^\circ.$$

donde MF es el margen de fase del sistema compensado, MF' es el del no compensado y ε es un margen extra de compensación.

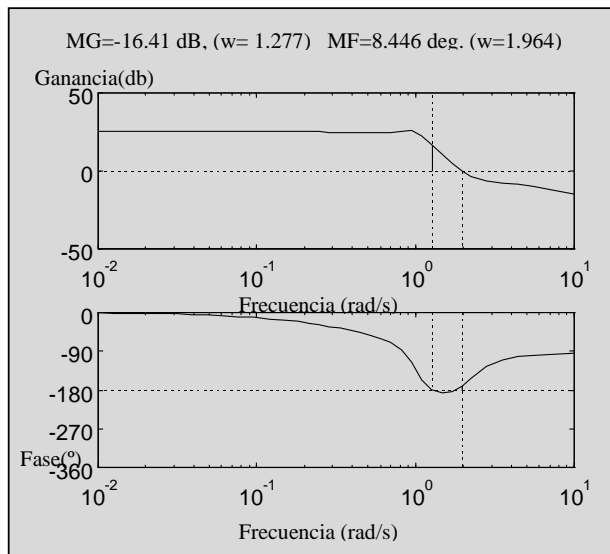


figura 13.6

d) Calculamos α como:

$$\alpha = \frac{1 - \text{sen } \gamma}{1 + \text{sen } \gamma} = 0.1$$

Si leemos en el diagrama de Bode de la figura 13.6 la frecuencia a la que la ganancia vale:

$$K_c = 20 \log \sqrt{\alpha} = -10 \text{ db}$$

es la nueva frecuencia de cruce de ganancia, es decir $\omega_c = 5.5 \text{ rad/s}$ por lo que:

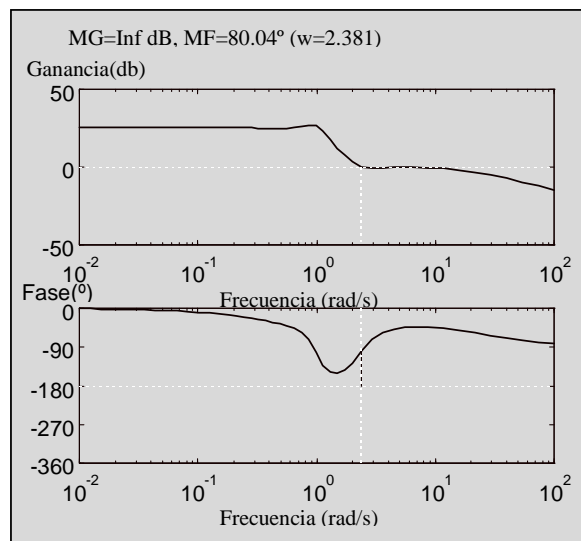
$$T = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\alpha}} \Rightarrow \frac{1}{T} = \omega_c \sqrt{\alpha} = 1.74 \text{ ad / s}$$

e) La red compensadora tiene una función de transferencia definida como:

Automática: problemas resueltos

$$G_c = \frac{K}{\alpha} \frac{(s + \frac{1}{T})}{(s + \frac{1}{\alpha T})} = \frac{9.5 (s + 1.74)}{0.1 (s + 17.4)}$$

f) El nuevo diagrama de Bode del sistema compensado es el mostrado en la figura, donde observamos que el margen de ganancia es infinito y el margen de fase es 80° con una frecuencia de cruce de ganancia de $\omega=2.38\text{rad/s}$, por lo que el sistema compensado cumple sobradamente las especificaciones de partida.



Bibliografía

Bibliografía

- 1.- *Ingeniería de control moderna.*
Katsuhiko Ogata.
Prentice Hall.
- 2.- *Dinámica de Sistemas.*
Katsuhiko Ogata.
Prentice Hall.
- 3.- *Linear Control System Analysis and Design: Conventional and Modern*
John J. D'Azzo
McGraw-Hill
- 4.- *Modern Control Systems analysis and Design Using MATLAB*
Robert H. Bishop
Addison-Wesley
- 5.- *FeedBack control of dynamic systems.*
Gene F. Franklin.
Addison Wesley.
- 6.- *Automática: Análisis y diseño de los sistemas automáticos de control*
José Gómez Campomanes.
Ediciones Jucar.
- 7.- *Retroalimentación y sistemas de control.*
Distefano
McGraw-Hill
- 8.- *Dynamical Systems and Automatic Control*
J.L.Martins de Carvalho
Prentice Hall.
- 9.- *Introduction to control systems*
D.K.Anand
Pergamon Press
- 10.- *Signals and Systems*

Alan V. Oppenheim
Prentice Hall.

11.- Perturbation Signals For System Identification

Keith Godfrey
Prentice Hall

12.- Feedback control systems.

Charles L. Phillips.
Prentice Hall.

13.- Introducción al control automático.

Weyrick
GG

14.- Stability Theory

C. Parks
Prentice Hall

15.- Modern Control Theory

William L. Brogan
Prentice Hall

16.- Sistemas de control lineal

Charles E. Rohrs
McGraw-Hill

17.- Automatic Control Systems

Benjamin C. Kuo
Prentice Hall

18.- Designing Linear Control Systems with Matlab.

Katsuhiko Ogata.
Prentice Hall.

19.- Control systems Design Using Matlab

Bahram Shahian
Prentice Hall

20.- Engineering Problem Solving With Matlab

Automática: problemas resueltos

D.M. Etter

Prentice Hall

21.- The Engineering Handbook

Richard C. Dorf

IEEE Press

Agradecimientos:

Cuando leo algún libro, me gusta también conocer a quien agradece el autor su colaboración y hasta ahora lo había considerado como algo protocolario que realizaba este al concluir su obra. Pero es en estos momentos, cuando no toca leer sino escribir, cuando compruebo que es un acto de justicia esta parte del libro y que incluso no debería ocupar esta posición sino que debería de ser la portada del libro.

En mi caso, los agradecimientos son para aquellas personas o entidades sin las cuales este libro no hubiese sido una realidad. En primer lugar, para mis padres, Agustín y Pilar, que lo dieron todo para la formación de sus hijos. A Paqui y María que me motivan y apoyan en todo lo que hago soportando pacientemente las consecuencias. Como no, recordar la ayuda aportada por Víctor T., Pilar P. y Jesús V. y muy especialmente la de Juan Antonio G. que en las ocasiones que reclamé su colaboración, nunca titubeó. Mi gratitud también a la Universidad de Málaga que ha puesto los medios para dar forma a este texto, a Lola por el interés mostrado, a mis alumnos por las observaciones realizadas y a los lectores por la confianza puesta en mí.

M. de la Paz