Tema 6

Circuitos y sistemas de primer orden

Versión imprimible del tema 6. Rafael Gómez Alcalá, Escuela Politécnica, Universidad de Extremadura

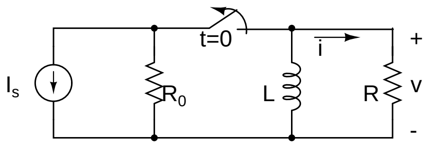
6.1

Índice

1. Respuesta natural de un circuito *RL*

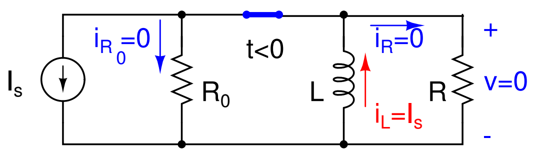
Respuesta natural

La respuesta natural de un circuito *RL* se puede describir a través del siguiente ejemplo:



Suponemos que la fuente de corriente independiente genera una corriente constante I_s, y que el interruptor ha estado cerrado durante largo tiempo(todas las corrientes y tensiones han alcanzado un valor constante). Sólo las corrientes constantes o cd pueden existir en el circuito antes de que se abra el interruptor y, por tanto, la bobina se presenta como un corto circuito ($Ldi/dt = 0$) antes de liberar la energía almacenada. 6.2

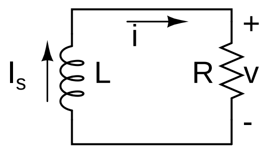
Antes de abrir el interruptor:



6.3

Debido a que la bobina está en corto circuito, la tensión en la rama inductiva es cero y no hay corriente en R_0 ni en R. Por tanto, toda la corriente I_s de la fuente aparece en la rama inductiva. El cálculo de la **respuesta natural** requiere encontrar la tensión y la corriente en los terminales de la resistencia después de que se haya abierto el interruptor, esto es, después de desconectarse la fuente y cuando la bobina empieza a liberar energía. Si se deja que $t = 0$ sea el instante en que el interruptor se abre, el problema consistirá en encontrar $v(t)$ e $i(t)$ para $t \geq 0$. 6.4

Para $t \geq 0$, el circuito anterior queda reducido a:



6.5

Cálculo de la corriente

Para determinar $i(t)$, se usa la ley de las tensiones de Kirchhoff a fin de obtener una expresión que incluya a i, R y L. La suma de las tensiones alrededor del lazo cerrado produce:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \tag{1.1}$$

donde se usa la convención pasiva de signos. La ecuación anterior se conoce como **ecuación diferencial ordinaria de primer orden**, ya que contiene términos que implican la derivada ordinaria de una incógnita, esto es, $\frac{di}{dt}$. El orden más alto de la ecuación es 1, de ahí el término primer orden. Para resolver la ecuación, dividimos entre L, trasponiendo el término que incluye a i al lado derecho y multiplicando después ambos lados por dt. 6.6

Simplificando,

$$\frac{di}{dt}dt = -\frac{R}{L}idt \tag{1.2}$$

Dividiendo ahora por i:

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt \tag{1.3}$$

Se obtendrá una expresión explícita para i como una función de t, si se integran ambos lados de la ecuación. 6.7

El uso de x e y como variables de integración da lugar a:

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} \frac{dx}{x} = -\frac{R}{L}\int_{t_0}^{t} dy \tag{1.4}$$

donde $i(t_0)$ es la corriente correspondiente a t_0 e $i(t)$ es la corriente relativa al tiempo t. En este caso, $t_0 = 0$. El resultado de cada integral produce:

$$\ln\frac{i(t)}{i(0)} = -\frac{R}{L}t \tag{1.5}$$

Utilizando la definición de logaritmo natural:

$$i(t) = i(0)e^{-(\frac{R}{L})t} \tag{1.6}$$

6.8

Cálculo de $i(0)$

Como no puede haber un cambio instantáneo de la corriente de la bobina entonces, en el primer instante después de abrirse el interruptor, la corriente en esta misma es invariable. Se utiliza 0^- para denotar el tiempo justo antes de la conmutación y 0^+ para el instante que sigue inmediatamente después, entonces:

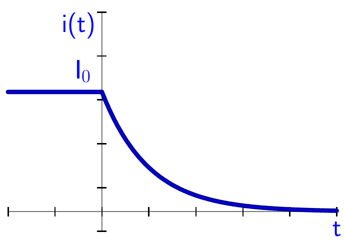
$$i(0^-) = i(0^+) = I_0 \tag{1.7}$$

donde I_0 es la corriente inicial en la bobina. La corriente inicial presenta la misma dirección que la dirección de referencia de i. Así, la ecuación se convierte en:

$$i(t) = I_0 e^{-(\frac{R}{L})t} \qquad t \geq 0 \tag{1.8}$$

6.9

La ecuación muestra que la corriente empieza en un valor inicial I_0 y decrece exponencialmente hacia 0 conforme t aumenta.



Deducimos la tensión en la resistencia del circuito a partir de la aplicación de la ley de Ohm:

$$v = iR = I_0 R e^{-(\frac{R}{L})t} \qquad t \geq 0^+ \tag{1.9}$$

6.10

La tensión se define sólo para $t > 0$, no en $t = 0$. La razón es que en 0 ocurre un salto en escalón de la tensión. Para $t < 0$, la derivada de la corriente es 0, por lo que la tensión también lo es (Este resultado se obtiene de $v = L\frac{di}{dt} = 0$). De tal modo:

$$v(0^-) = 0 \qquad v(0^+) = I_0 R \tag{1.10}$$

donde $v(0^+)$ se obtiene de la expresión 1.9 para t = 0^+. 6.11

Cálculo de la potencia

Se obtiene la potencia disipada en la resistencia a partir de cualquiera de las siguientes expresiones:

$$p = vi \qquad p = i^2 R \qquad \text{o bien} \qquad p = \frac{v^2}{R} \tag{1.11}$$

Sin importar la forma que se use, la expresión resultante es:

$$p = I_0^2 R e^{-2(R/L)dt} \qquad t \geq 0^+ \tag{1.12}$$

6.12

Cálculo de la energía

La energía que se entrega a la resistencia durante cualquier intervalo después de abrirse el interruptor es:

$$\begin{aligned} w &= \int_0^t p\,dx \\ &= \int_0^t I_0^2 R e^{-2(R/L)x} dx \\ &= \frac{1}{2(R/L)} I_0^2 R (1 - e^{-2(R/L)t}) \\ &= \frac{1}{2} L I_0^2 (1 - e^{-2(R/L)t}) \qquad t \geq 0 \end{aligned} \tag{1.13}$$

6.13

Constante de tiempo

La expresión para $i(t)$ incluye un término de la forma $e^{-(R/L)t}$. El recíproco de este cociente es **la constante de tiempo** del circuito:

$$\tau = \text{constante de tiempo} = \frac{L}{R} \tag{1.14}$$

Mediante la constante de tiempo, escribimos las expresiones para la corriente, la tensión, la potencia y la energía:

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau} \qquad t \geq 0 \tag{1.15}$$
$$v(t) = I_0 R e^{-t/\tau} \qquad t \geq 0^+ \tag{1.16}$$
$$p(t) = I_0^2 R e^{-2t/\tau} \qquad t \geq 0^+ \tag{1.17}$$
$$w(t) = \frac{1}{2} L I_0^2 (1 - e^{-2t/\tau}) \qquad t \geq 0 \tag{1.18}$$

6.14

Características

La constante de tiempo es un parámetro importante en los circuitos de primer orden, por lo que vale la pena mencionar sus características. Primero, hay que pensar en el tiempo que transcurre tras la conmutación en términos de múltiplos enteros de τ. Una constante de tiempo después de que la bobina ha empezado a liberar su energía almacenada hacia la resistencia, la corriente se ha reducido hasta e^{-1}, o aproximadamente 0,37 de su valor inicial. 6.15

La tabla siguiente nos proporciona el valor de $e^{-t/\tau}$ para múltiplos enteros de τ de 1 a 10.

t	$e^{-t/\tau}$	t	$e^{-t/\tau}$
τ	$3{,}6788 \cdot 10^{-1}$	6τ	$2{,}4788 \cdot 10^{-3}$
2τ	$1{,}3534 \cdot 10^{-1}$	7τ	$9{,}1188 \cdot 10^{-4}$
3τ	$4{,}9787 \cdot 10^{-2}$	8τ	$3{,}3546 \cdot 10^{-4}$
4τ	$1{,}8316 \cdot 10^{-2}$	9τ	$1{,}2341 \cdot 10^{-4}$
5τ	$6{,}7379 \cdot 10^{-3}$	10τ	$4{,}5400 \cdot 10^{-5}$

Cuando el tiempo transcurrido excede 5 constantes de tiempo, la corriente es menor que 1 % de su valor inicial. A veces se afirma que 5 constantes de tiempo después de ocurrir la conmutación, las corrientes y las tensiones han alcanzado sus valores finales. 6.16

Por tanto, en los circuitos de primer orden, "*mucho tiempo*" indica que han transcurrido 5 o más constantes de tiempo. La existencia de corriente en el circuito RL que estamos estudiando, es un suceso momentáneo que se conoce como **respuesta transitoria** del circuito. La respuesta que existe mucho tiempo después de que ha ocurrido la conmutación recibe el nombre de **respuesta de estado permanente**. La frase **mucho tiempo** equivale al tiempo que tarda el circuito en alcanzar su valor de estado permanente. Cualquier circuito de primer orden se caracteriza, en parte, por el valor de su constante de tiempo. Si ésta no se puede calcular mediante ningún método, se puede determinar su valor a partir de la gráfica de la respuesta natural del circuito. 6.17

Otra característica de la constante de tiempo es que proporciona el tiempo requerido para que la corriente llegue a su valor final, si la corriente sigue cambiando a su tasa inicial. Esta es una variación que sigue una línea recta. Para ello, evaluamos di/dt en 0^+ y se supone que la corriente continúa cambiando a este ritmo:

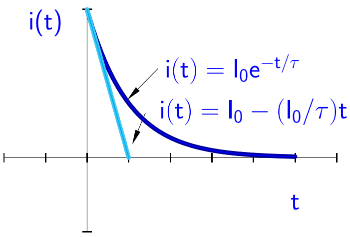
$$\frac{di}{dt}(0^+) = -\frac{R}{L}I_0 = -\frac{I_0}{\tau} \tag{1.19}$$

Después de esto, si i empieza como I_0 y disminuye a una tasa constante de I_0/τ, la expresión para i será:

$$i = I_0 - \frac{I_0}{\tau}t \tag{1.20}$$

Esta ecuación indica que i alcanzará su valor final de 0 en τ segundos. 6.18

La figura siguiente muestra cómo la interpretación gráfica resulta útil en la estimación de la constante de tiempo de un circuito a partir de la gráfica de su respuesta natural.



Una gráfica de este tipo se puede generar en un osciloscopio midiendo la corriente de salida. El dibujo de la tangente a la gráfica de la respuesta natural en $t = 0$ y la lectura del valor en el cual la tangente corta al eje de tiempo, producen el valor de τ. 6.19

Resumen del cálculo de la resp. natural RL

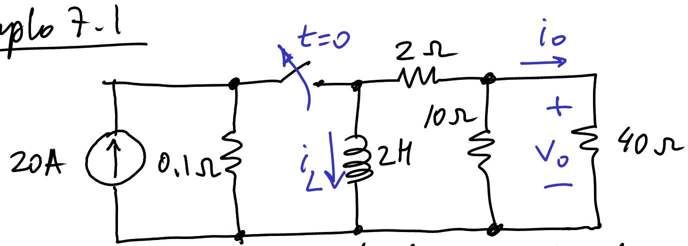
El cálculo de la respuesta natural de un circuito RL se puede resumir así:

- Se determina la corriente inicial $i(0)$, a través de la bobina.
- Se encuentra la constante de tiempo del circuito.

- Se utiliza la ecuación $i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ para generar $i(t)$ a partir de $i(0)$ y τ.

El resto de corrientes y tensiones en el circuito se pueden obtener a partir de $i(t)$. 6.20

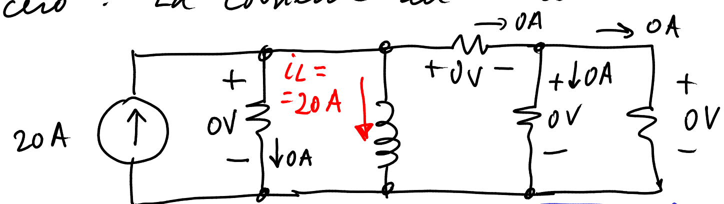
Ejemplo 7.1



El interruptor ha estado cerrado durante mucho tiempo y se abre en $t=0$.

a) Calcular $i_L(t)$ para $t \geq 0$.

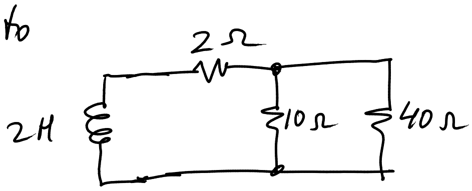
La tensión en la bobina debe ser cero antes de cero. La corriente en la bobina será de 20A:



$\boxed{t<0}$ $\boxed{i_L(0^-) = 20A}$

Justo después de abrir el interruptor, $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 20A$. Esta es la corriente inicial de la bobina.

Cuando se abre el interruptor, tenemos el circuito



La resistencia equivalente que "ve" la bobina es la combinación en paralelo de la resistencia de 10 Ω y de 40 Ω más la de 2 Ω, que está en serie:

$$R_{eq} = 2 + (40 \| 10) = 10\ \Omega$$

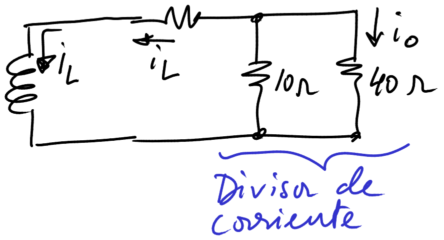
La constante de tiempo del circuito es:

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{2}{10} = 0{,}2\,s.$$ La expresión de $i_L(t)$:

$$i_L(t) = 20\,e^{-5t}\ A, \quad t \geq 0$$

b) Calcular $i_0(t)$.

Se trata de expresar $i_0(t)$ en función de $i_L(t)$:



Se puede usar la ecuación del divisor de corriente que forman las resistencias.

$$i_0(t) = -i_L(t) \cdot \frac{10}{10+40} = -20e^{-5t} \cdot \frac{10}{50}$$

$$i_0(t) = -4e^{-5t}\ \text{A} \quad , t \geq 0^+$$

Para $t=0^-$, $i_0(t)=0$, por lo que se produce un salto de corriente instantáneo en la resistencia.

c) Calcular $v_0(t)$.

A partir de la Ley de Ohm:

$$v_0(t) = 40\, i_0(t) \Rightarrow v_0(t) = -160e^{-5t}\ \text{V} \;, t \geq 0^+$$

d) El porcentaje de la energía total almacenada en la bobina de 2H que se disipa en la resistencia de 10Ω.

La energía de la bobina se reparte entre las resistencias de manera desigual. La energía total se determina integrando la potencia:

$W_{10\Omega} = \int_0^\infty P_{10}(t)\,dt$. Como sabemos la tensión $v_0(t)$,

$$P_{10}(t) = \frac{v_0^2(t)}{10} = 2560e^{-10t}\ \text{W} \;, t \geq 0^+$$

$$W_{10\Omega} = \int_0^\infty 2560\, e^{-10t}\, dt = 256 \text{ J.}$$

La energía inicial es:

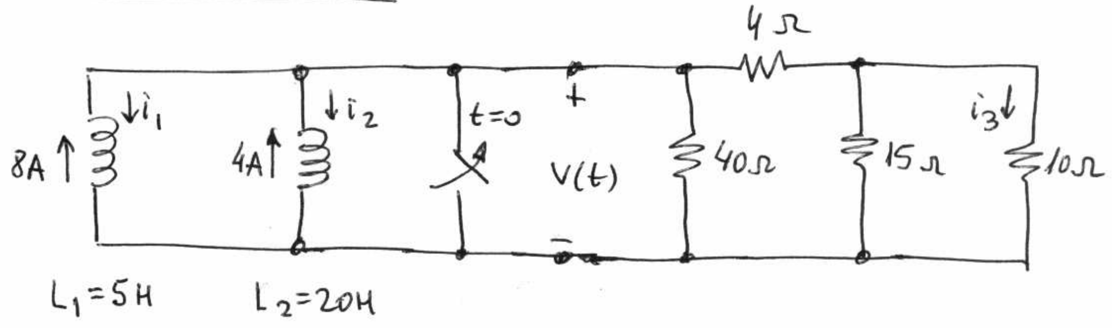
$$W(0) = \frac{1}{2} L\, i_L^2(0) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20^2 = 400 \text{ J.}$$

Los 256 J representan un porcentaje:

$$\%\ \text{Energía en } 10\,\Omega = \frac{256}{400}(100) = \underline{\underline{64\%}}$$

El resto de la energía se reparte entre las otras resistencias.

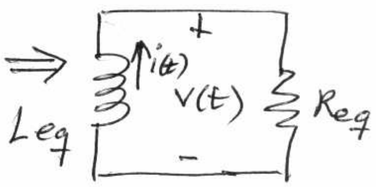
EJEMPLO 7.2



a) Calcular i_1, i_2 e i_3 para $t \geq 0$.

→ Hay que calcular $V(t)$ para conocer i_1, i_2 e i_3

→ Simplificamos el circuito ⇒



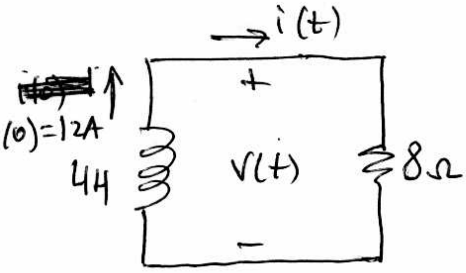
$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = \frac{5 \cdot 20}{5+20} = 4H$$, por estar en paralelo.

La corriente inicial de esta bobina será

$i(0) = i_1(0) + i_2(0)$, usando LCK.

$= 8A + 4A = 12A$.

$R_{eq} = 8\,\Omega$, tras hacer asociaciones serie y paralelo.



$$i(t) = 12\, e^{-\frac{t}{0{,}5}} = 12\, e^{-2t}\ A$$

$$V(t) = 8\, i(t) = 96\, e^{-2t}\ V$$

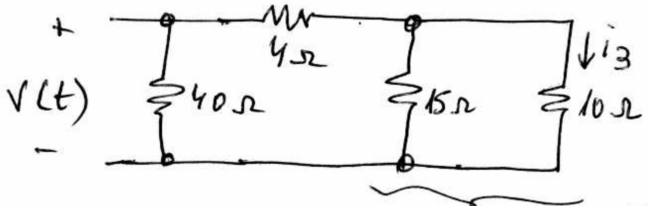
$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{4}{8} = 0{,}5 \text{ seg.}$$

Conocida $V(t)$, se determinan $i_1(t)$ e $i_2(t)$ mediante las integrales:

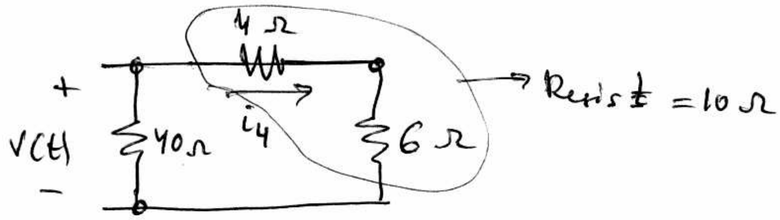
$$i_1 = \frac{1}{5}\int_0^t 96\, e^{-2x}\, dx - 8 = 1{,}6 - 9{,}6\, e^{-2t}\ A\ ,\ t \geq 0$$

$$i_2 = \frac{1}{20}\int_0^t 96\, e^{-2x}\, dx - 4 = -1{,}6 - 2{,}4\, e^{-2t}\ A\ ,\ t \geq 0$$

Para determinar i_3:

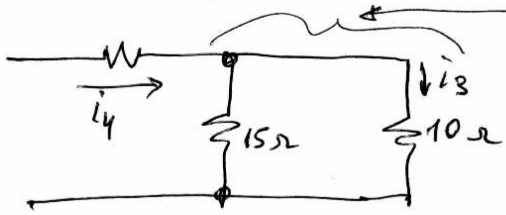


$$\text{Resist. eq} = \frac{15 \times 10}{15+10} = 6\,\Omega$$



$$i_4 = \frac{V(t)}{10}$$

Volviendo arriba, utilizo el divisor de corriente:



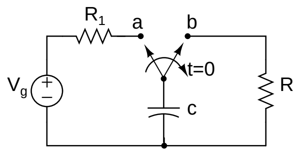
$$i_3 = i_4 \cdot \frac{15}{10+15} = \frac{V(t)}{10} \cdot \frac{15}{10+15}$$

$$i_3 \doteq 5{,}76\, e^{-2t}\, A \;, \; t \geq 0^+$$

2. Respuesta natural de un circuito *RC*

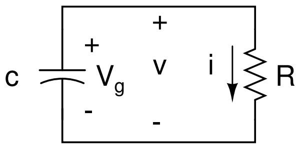
Respuesta natural RC

La respuesta de un circuito *RC* es análoga a la de un circuito *RL*. La respuesta natural de un circuito *RC* se puede determinar a partir del siguiente ejemplo:



Suponemos que el interruptor ha estado en la posición “a"por mucho tiempo, lo que permite que el lazo formado por la fuente de tensión constante, V_g, la resistencia R_1 y el condensador C alcancen una posición de estado permanente. 6.21

Hay que tener en cuenta que el condensador se comporta como un **circuito abierto** cuando se le aplica una tensión constante. De tal modo, la fuente de tensión no puede sostener una corriente y, por ello, la tensión de la fuente aparece en las terminales del condensador. Debido a que no hay cambio instantáneo de la tensión en los terminales de un condensador, el problema queda reducido a resolver el siguiente circuito:



6.22

Deducción de la expresión de la tensión

Podemos encontrar fácilmente la tensión $v(t)$ pensando en términos de tensiones en los nudos. Utilizando el nudo inferior de R y C como nudo de referencia y sumando la corriente que se aleja del nudo superior:

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

Se usan los mismos métodos matemáticos que con los circuitos RL para obtener la solución a $v(t)$. Por tanto, tenemos que:

$$v(t) = v(0)e^{-t/RC} \qquad t \geq 0 \tag{2.1}$$

6.23

Como se ha determinado antes, la tensión inicial del condensador es igual a la tensión de la fuente de tensión V_g, o

$$v(0^-) = v(0) = v(0^+) = V_g = V_0, \tag{2.2}$$

donde V_0 es la tensión inicial en el condensador. La constante de tiempo para el circuito RC es igual al producto de la resistencia y la capacidad:

$$\tau = RC \tag{2.3}$$

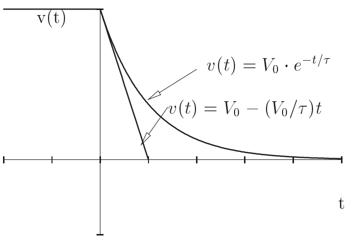
Si sustituimos estas expresiones en $v(t) = v(0)e^{-t/RC}$, obtenemos:

$$v(t) = V_0 e^{-t/\tau} \qquad t \geq 0$$

(2.4)

6.24

La respuesta natural de un circuito RC es una caída exponencial de la tensión inicial. La constante de tiempo RC es un parámetro que regula la velocidad a la que decrece la tensión. La siguiente gráfica representa la ecuación de $v(t)$ y la interpretación gráfica de la constante de tiempo.



6.25

Potencia y energía

Tras calcular $v(t)$, podemos obtener $i(t)$, $p(t)$ y $w(t)$:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0}{R}e^{-t/\tau} \qquad t \geq 0^+ \tag{2.5}$$

$$p(t) = vi = \frac{V_0^2}{R}e^{-2t/\tau} \qquad t \geq 0^+ \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_0^t p\,dx = \int_0^t \frac{V_0^2}{R}e^{-2x/\tau}dx \\ &= \frac{1}{2}CV_0^2(1 - e^{-2t/\tau}) \qquad t \geq 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

6.26

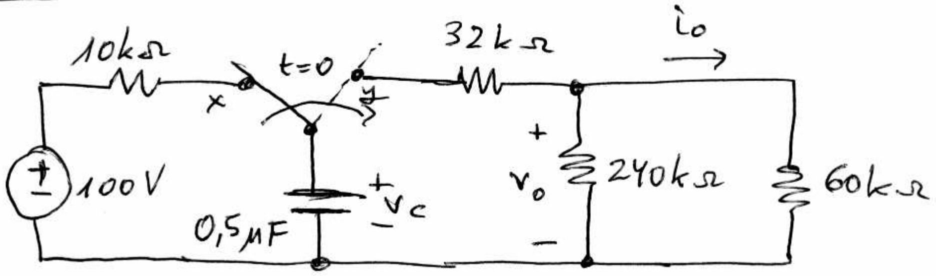
Resumen del cálculo de la resp. natural RC

El cálculo de la respuesta natural de un circuito RC se puede resumir en:

- Determinar la tensión inicial $V(0)$, en el condensador.
- Encontrar la constante de tiempo en el circuito.
- Utilizar la ecuación $v(t) = V_0 e^{-t/\tau}$ para obtener $v(t)$ a partir de V_0 y τ.

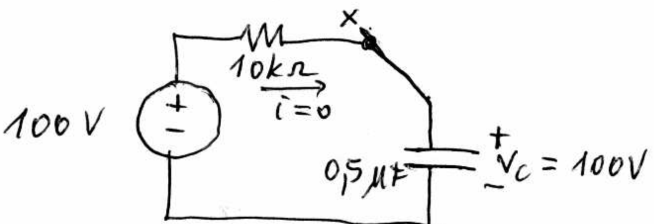
6.27

EJEMPLO 7.3



a) Calcular $V_c(t)$ para $t \geq 0$

Para $t<0$, el circuito tiene el interruptor en ~~xx~~ "x":



Las corrientes y tensiones son constantes:

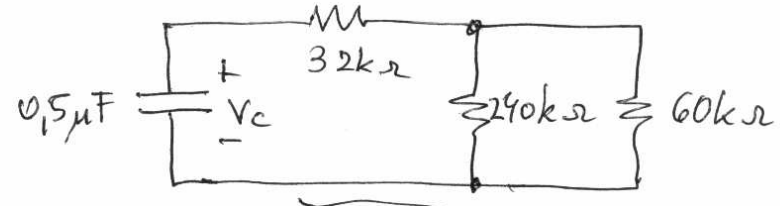
$i=0$, porque:

$$i = C\frac{dv_c}{dt} = 0$$

La tensión de la fuente es V_C.

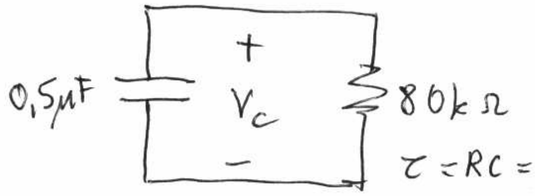
Por tanto $V_C(0^-) = V_C(0^+) = 100\,V$.

Para $t > 0$, el circuito tiene el interruptor en "y":



$$R_{eq} = 32k\Omega + \frac{240k\Omega \cdot 60k\Omega}{240k\Omega + 60k\Omega} = 80k\Omega$$

Circuito equivalente

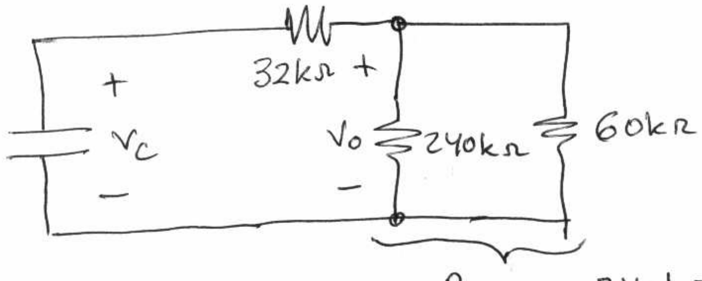


$\tau = RC = 40ms$

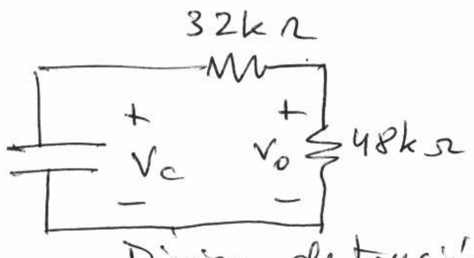
$$V_c = 100\,e^{-\frac{t}{40\cdot10^{-3}}} = 100\,e^{-25t}\ V$$

b) Calcular $v_o(t)$ para $t \geq 0^+$.

Se utiliza $v_c(t)$ y el circuito anterior:



$$R_{equiv.} = \frac{240k\Omega \cdot 60k\Omega}{240k\Omega + 60k\Omega} = 48k\Omega$$



Divisor de tensión

$$V_o = V_c\,\frac{48}{48+32} = 60\,e^{-25t}\ V$$

c) Calcular $i_o(t)$.

Usando el resultado del apartado anterior:

$$i_o(t) = \frac{V_o(t)}{60k\Omega} \quad \text{(LEY de OHM)}$$

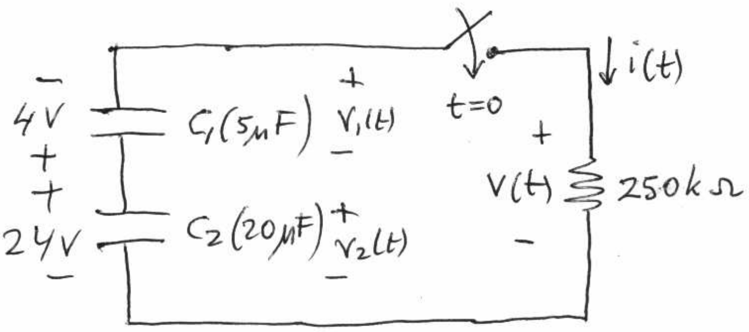
$$i_o(t) = e^{-25t} \, mA \quad , \quad t \geq 0^+$$

d) Calcular la energía total disipada en la resistencia de $60k\Omega$:

$$W_{60k\Omega} = \int_0^\infty i_o^2(t) \cdot 60 \cdot 10^3 \, dt = \int_0^\infty e^{-50t} \cdot 60 \cdot 10^3 dt =$$

$$= \frac{60 \cdot 10^3}{50} = \underline{\underline{1{,}2 \, mJ}}$$

EJEMPLO 7.4



a) Calcular $V_1(t)$, $V_2(t)$ y $V(t)$ para $t \geq 0$ e $i(t)$ para $t \geq 0^+$.

→ Obtenemos el circuito equivalente para $t \geq 0$:

$C_{eq} = \frac{5 \cdot 20}{25} = 4\mu F$

$\tau = R \cdot C_{eq} = 250 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-6} = 1$ seg.

$$V(t) = V(0)\, e^{-\frac{t}{\tau}} = 20\, e^{-t}\ V, \quad t \geq 0$$

La corriente $i(t)$ es:

$$i(t) = \frac{V(t)}{250 \cdot 10^3} = 80 \cdot 10^{-6} e^{-t} = 80 e^{-t}\ \mu A, \quad t \geq 0^+$$

→ A partir de $i(t)$ se obtienen $V_1(t)$ y $V_2(t)$:

$$V_1(t) = -\frac{1}{5 \cdot 10^{-6}} \int_0^t 80 \cdot 10^{-6} e^{-x} dx - 4 = (16 e^{-t} - 20)\ V, \quad t \geq 0.$$

$$V_2(t) = -\frac{1}{20 \cdot 10^{-6}} \int_0^t 80 \cdot 10^{-6} e^{-x} dx + 24 = (4 e^{-t} + 20)\ V, \quad t \geq 0.$$

b) Calcular la energía inicial almacenada en los condensadores C_1 y C_2

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 (V_1(0))^2 = \frac{1}{2}\, 5 \cdot 10^{-6} \cdot 4^2 = 40\ \mu J$$

$$W_2 = \frac{1}{2} C_2 (V_2(0))^2 = \frac{1}{2}\, 20 \cdot 10^{-6}\, 24^2 = 5760\ \mu J$$

$$W_0 = W_1 + W_2 = 40\ \mu J + 5760\ \mu J = 5800\ \mu J$$

c) Calcular la energía en los condensadores si $t \to \infty$

$V_1(\infty) = -20V \quad V_2(\infty) = 20V$

$$W_\infty = \frac{1}{2} C_1 [V_1(\infty)]^2 + \frac{1}{2} C_2 [V_2(\infty)]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\, 5 \cdot 10^{-6} \cdot 20^2 + \frac{1}{2}\, 20 \cdot 10^{-6} \cdot 20^2 = 5000\ \mu J$$

d) Demostrar que la energía total entregada a la resistencia de 250 kΩ es la diferencia de b) y c)

La energía entregada a la resistencia es la integral de la potencia:

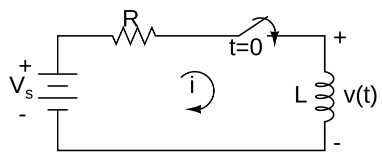
$$W = \int_0^\infty \underbrace{p}_{\frac{V(t)^2}{250\cdot 10^3}}\,dt = \int_0^\infty \frac{400\,e^{-2t}}{250\cdot 10^3}\,dt = 800\,\mu J$$

$$800\,\mu J = (\underbrace{5800}_{\text{resultado b)}} - \underbrace{5000}_{\text{resultado c)}})\,\mu J$$

3. Respuesta al escalón de circuitos *RL* y *RC*

Respuesta escalón de un circuito *RL*

Para empezar el análisis de la respueta al escalón se modifica el circuito de primer orden añadiendo un interruptor.



Vamos a expresar la tensión en la bobina después de cerrarse el interruptor en términos de la corriente. 6.28

Usamos el análisis de circuitos para obtener la ecuación diferencial que describe al circuito en términos de la variable de interés y luego se usa el cálculo elemental para resolver la ecuación. Después de cerrarse el interruptor, la LTK impone:

$$V_s = Ri + L\frac{di}{dt}, \tag{3.1}$$

que se puede resolver para la corriente, separando las variables i y después integrando. El primer paso en este método es resolver la ecuación para la derivada di/dt:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}\left(i - \frac{V_s}{R}\right) \tag{3.2}$$

6.29

Se puede escribir también como:

$$di = -\frac{R}{L}\left(i - \frac{V_s}{R}\right)dt \tag{3.3}$$

A continuación, integraremos ambos lados de la ecuación. Para ello, usamos x e y como variables de integración y obtenemos:

$$\frac{di}{i-(V_s/R)} = -\frac{R}{L}dt. \tag{3.4}$$

Integrando:

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{dx}{x-(V_s/R)} = -\frac{R}{L}\int_0^t dy, \tag{3.5}$$

donde I_0 es la corriente en $t = 0$ e $i(t)$ es la corriente en cualquier $t > 0$. En este caso concreto $I_0 = 0$, pero lo dejamos así indicado para tener en cuenta el caso genérico en el que haya energía almacenada inicialmente en la bobina. 6.30

Efectuando la integración:

$$\ln\frac{i(t)-(V_s/R)}{I_0-(V_s/R)} = -\frac{R}{L}t \tag{3.6}$$

De la ecuación anterior deducimos:

$$\frac{i(t)-(V_s/R)}{I_0-(V_s/R)} = e^{-(R/L)t}$$

o bien,

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right)e^{-(R/L)t} \tag{3.8}$$

Cuando la energía inicial en la bobina es 0, I_0 es 0. Por ello, la ecuación queda reducida a:

$$i(t) = \frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{R}e^{-(R/L)t} \tag{3.9}$$

6.31

Esta ecuación indica que después de que el interruptor se ha cerrado, la corriente aumenta desde 0 hasta un valor final de V_s/R. La constante de tiempo del circuito, L/R determina la velocidad de crecimiento. Una constante de tiempo después de que se ha cerrado el interruptor, la corriente habrá alcanzado aproximadamente el 63 % de su valor final o,

$$i(\tau) = \frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{R}e^{-1} \simeq 0,6321\frac{V_s}{R} \tag{3.10}$$

Si la corriente continua aumentando a su velocidad inicial, alcanzaría su valor final en t = τ, esto es debido a que:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{V_s}{R}\left(\frac{-1}{\tau}\right)e^{-t/\tau} = \frac{V_s}{R}e^{-t/\tau} \tag{3.11}$$

6.32

La velocidad inicial a la que aumenta $i(t)$ es:

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{V_s}{L} \tag{3.12}$$

Si la corriente va a continuar aumentando a esta velocidad, la expresión para i será:

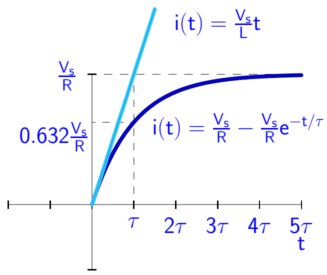
$$i = \frac{V_s}{L}t \tag{3.13}$$

A partir de esto, en t = τ:

$$i = \frac{V_s}{L}\frac{L}{R} = \frac{V_s}{R} \tag{3.14}$$

6.33

En la gráfica siguiente vemos reflejados estos valores:



La tensión en una bobina es Ldi/dt. Usando la expresión:

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right) e^{-(R/L)t} \qquad t \geq 0^+ \tag{3.15}$$

se obtiene

$$v(t) = L\left(-\frac{R}{L}\right)\left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right) e^{-(R/L)t} = (V_s - I_0R)e^{-(R/L)t} \tag{3.16}$$

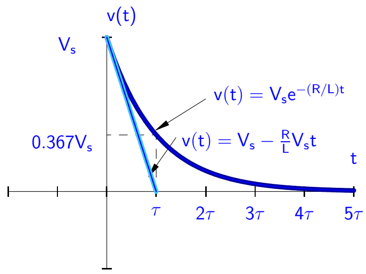
6.34

La tensión de una bobina es 0 antes de que se cierre el interruptor. La ecuación anterior indica que la tensión de la bobina asciende hasta $V_s - I_0R$ en el instante en que el interruptor se cierra y luego decae exponencialmente hasta 0. El sentido que tiene el valor de $v(t)$ en $t = 0^+$ es debido a que la corriente inicial es I_0 y la bobina evita un cambio instantáneo en la corriente, la corriente es I_0 en el instante posterior en que el interruptor se ha cerrado. La caída de tensión en la resistencia es I_0R, y la tensión aplicada en la bobina es igual a la tensión de la fuente menos la caída de la fuente, esto es, $V_s - I_0R$. Cuando la corriente inicial es 0, la ecuación anterior se simplifica a:

$$v(t) = V_s e^{-(R/L)t} \tag{3.17}$$

6.35

Si la corriente inicial es 0, la tensión en la bobina es V_s. También se espera que la tensión de la bobina se acerque a 0 cuando t aumenta,debido a que la corriente en el circuito se está aproximando al valor constante V_s/R. En la figura siguiente se representa la tensión y la relación entre la constante de tiempo y la tasa inicial a la cual está disminuyendo la tensión en la bobina.



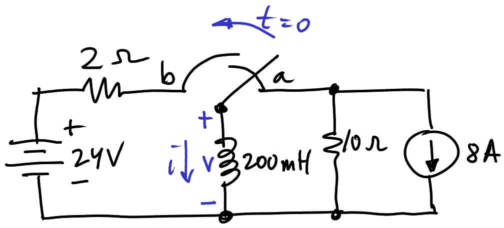
6.36

Si hay una corriente inicial en la bobina, la ecuación

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right) e^{-(R/L)t} \tag{3.18}$$

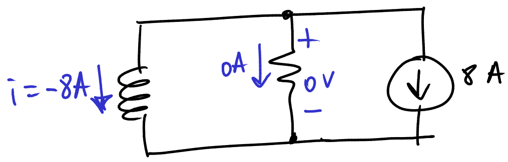
proporciona una solución para ella. El signo algebraico de I_0 es positivo si la corriente inicial está en la misma dirección que i; de otro modo, I_0 tendrá signo negativo.

Ejemplo 7.5



El interruptor pasa de "a" a "b" en $t=0$ tras estar mucho tiempo en "a". Nunca se pierde contacto con el circuito: la corriente en la bobina no se interrumpe nunca.

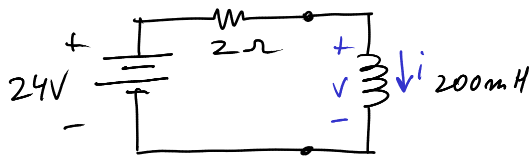
a) Calcular $i(t)$ para $t \geq 0$



$\boxed{t<0}$

$i(0^-) = -8A$

Al cambiar el interruptor, $i(0^+) = i(0^-) = -8A$. Ahora se tiene el circuito:



En este circuito, cuando $t \to \infty$, $v \to 0$ e $i \to \frac{24}{2} = 12\,A$, luego $i(\infty) = 12\,A$

La constante de tiempo es:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{2} = 100\,ms$$

$$i(t) = i_{final} + (i_{inic} - i_{final})\,e^{-\frac{t}{\tau}} =$$

$$= 12 + (-8 - 12)\,e^{-\frac{t}{0{,}1}} = \underline{\underline{12 - 20e^{-10t}\,A}},\ t \geq 0$$

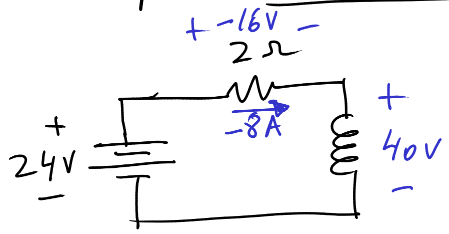
b) ¿Qué tensión inicial se produce en la bobina justo después de que el interruptor pase a "b"?

$$v(t) = L\frac{di}{dt} = 0{,}2\cdot\frac{d}{dt}\left(12-20e^{-10t}\right) =$$

$$= 0{,}2\,\left(200e^{-10t}\right) = 40e^{-10t}\ \text{V}\,,\ t\geq 0^{+}$$

$$v(0^{+}) = 40\ \text{V}$$

d) ¿Tiene sentido este resultado en términos del comportamiento del circuito?



Usando la LTK y la ley de Ohm se comprueba que el resultado es consistente con el comportamiento del circuito.

c) ¿Cuantos milisegundos han de transcurrir para que v=24 V?

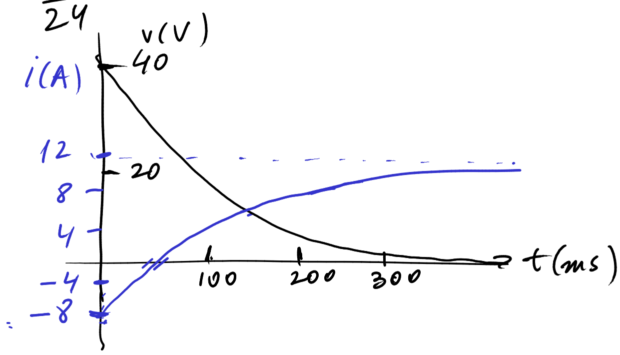
A partir de la expresión de v:

$v(t) = 40e^{-10t}$ V se plantea la ecuación:

$24 = 40e^{-10t}$. Despejando "t":

$$t = \frac{1}{10}\ln\frac{40}{24} = 51{,}08\ \text{ms}.$$

e) Dibujar $i(t)$ y $v(t)$.



También es posible describir directamente la tensión $v(t)$ en la bobina, no sólo en términos de la corriente del circuito. La tensión en la resistencia es la diferencia entre la tensión de la fuente y de la bobina.

$$i(t) = \frac{V_s}{R} - \frac{v(t)}{R}, \tag{3.19}$$

donde V_s es una constante. 6.37

Derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{dv}{dt}. \tag{3.20}$$

Si se multiplica por L la expresión anterior, lo que hay a la izquierda es la tensión en la bobina,

$$v(t) = -\frac{L}{R}\frac{dv}{dt}. \tag{3.21}$$

Ahora se puede simplificar, despejando v:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{L}v = 0. \tag{3.22}$$

Cuando obtuvimos la ecuación diferencial para la corriente de la bobina, se llegó a:

$$V_s = Ri + L\frac{di}{dt} \tag{3.23}$$

Ahora, esta ecuación se reescribe como:

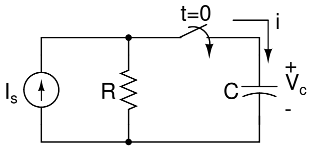
$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V_s}{L} \tag{3.24}$$

6.38

Se puede observar que las ecuaciones $\frac{dv}{dt} + \frac{R}{L}v = 0$ y $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V_s}{L}$, tienen la misma forma. Cada una es igual a la suma de la primera derivada de la variable y una constante por la variable a un valor constante. En la ecuación $\frac{dv}{dt} + \frac{R}{L}v = 0$, la constante en el lado derecho resulta ser 0. En ambas ecuaciones, la constante que multiplica la variable dependiente es el recíproco de la constante de tiempo, esto es,$R/L = 1/\tau$. 6.39

Respuesta al escalón de un circuito *RC*

Es posible encontrar la respuesta al escalón de un circuito *RC* de primer orden analizando el circuito de la figura:



Para esto, calculamos el equivalente Norton de la red conectado al condensador equivalente. Sumando las corrientes que se alejan del nudo superior se obtiene la ecuación diferencial:

$$C\frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{R} = I_s \tag{3.25}$$

6.40

Si ecuación la dividimos por C,

$$\frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{RC} = \frac{I_s}{C} \tag{3.26}$$

La comparación de esta ecuación con $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V_s}{L}$, revela que la forma de la solución para V_c es la misma que la de la corriente en el circuito *RL*. Por tanto, al sustituir simplemente las variables y coeficientes apropiados puede escribirse directamente la solución para V_c. La transformación requiere que I_s sustituya a V_s, que C reemplace a L, que $1/R$ sustituya a R y que V_0 reemplace a I_0. Obtenemos:

$$V_c(t) = I_sR + (V_0 - I_sR)e^{-t/RC} \qquad t \geq 0 \tag{3.27}$$

6.41

Una deducción similar para la corriente en el condensador produce la ecuación diferencial:

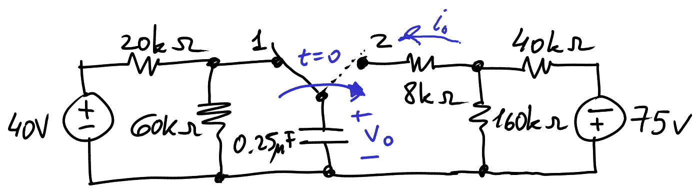
$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i = 0 \tag{3.28}$$

La ecuación anterior tiene la misma forma que $\frac{dv}{dt} + \frac{R}{L} v = 0$, por lo que la solución para i se obtiene utilizando las mismas transformaciones utilizadas para la solución de $\frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{RC} = \frac{I_s}{C}$. Por lo tanto, la solución es

$$i = \left(I_s - \frac{V_0}{R} \right) e^{-t/RC} \qquad t \geq 0^+ \tag{3.29}$$

donde V_0 es el valor inicial de V_c, la tensión en el condensador. 6.42

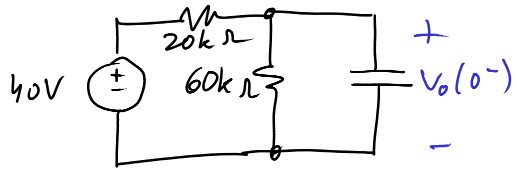
Ejemplo 7.6



El interruptor ha estado en 1 mucho tiempo. En $t=0$ se mueve a 2.

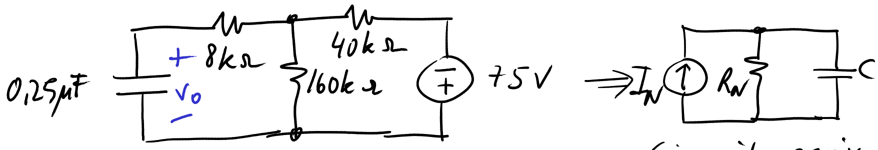
a) Calcular $V_o(t)$ para $t \geq 0$

El valor inicial de V_o se determina con el divisor de tensión:



$$V_o(0^-) = 40 \cdot \frac{60}{60+20} = 30\,V$$

Para $t=0^+$, $v(0^+)=30\,V=v(0^-)$. Al pasar el interruptor a 2, el circuito es:

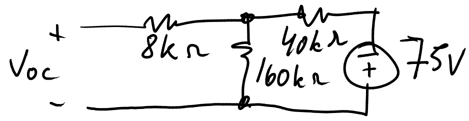


Circuito equiv.

Para determinar el circuito equivalente y poder aplicar:

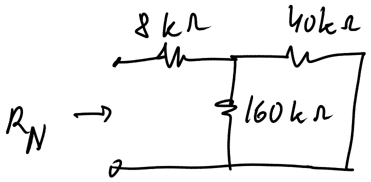
$$v_0(t)=I_NR_N+(V_0-I_NR_N)e^{-\frac{t}{R_NC}},$$

se puede proceder de varias formas. En este caso puede resultar cómodo determinar la tensión en circuito abierto V_{oc}:



$$V_{oc}=-75\cdot\frac{160}{160+40}=$$
$$=-60\,V$$

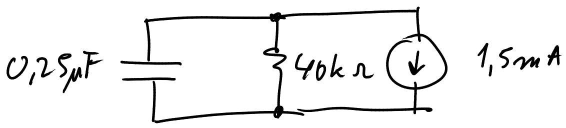
La resistencia de Norton es muy fácil de calcular, asociando las resistencias tras anular la fuente de 75V:



$$R_N=(160k\Omega \parallel 40k\Omega)+8k\Omega=$$
$$=\frac{160\cdot 40}{160+40}\cdot 10^3+8\cdot 10^3=$$
$$=40k\Omega$$

La corriente de norton es: $I_N=\frac{V_{oc}}{R_N}=-\frac{60\,V}{40k\Omega}=-1{,}5\,mA$

El circuito que se obtiene es:



$\Rightarrow \tau=R_NC=$
$=10ms$

$$v_o(t) = -60 + [30 - (-60)]\, e^{-100t} =$$
$$= -60 + 90\, e^{-100t}\ V,\ t \geq 0.$$

b) Calcular $i_o(t)$, $t \geq 0^+$

Se puede usar directamente:

$$i_o(t) = \left(I_N - \frac{V_0}{R_N}\right) e^{-\frac{t}{R_N C}},\quad t \geq 0^+.$$

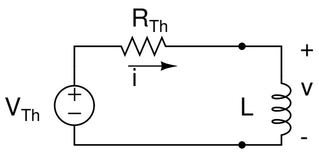
$$i_o(t) = -2{,}25\, e^{-100t}\ mA,\quad t \geq 0^+$$

Se comprueba que $i_o(t) = C\dfrac{dv_o}{dt} = 0.25 \cdot 10^{-6}\left(-9000\, e^{-100t}\right) =$
$$= -2{,}25\, e^{-100t}\ mA.$$

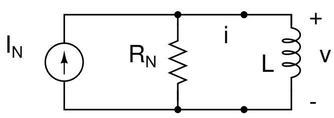
4. Una solución general para las respuestas de escalón y natural

Solución general

El método general para determinar ya sea la respuesta natural o la de escalón de los circuitos *RL* y *RC* de primer orden que se muestran a continuación, se basa en que sus ecuaciones diferenciales son las mismas.

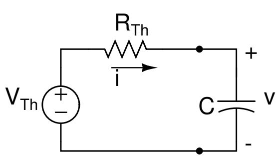


Bobina conectada a un equivalente Thevenin

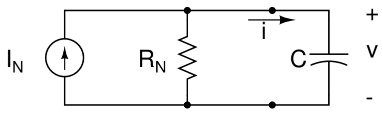


Bobina conectada a un equivalente Norton

6.43



Condensador conectado a un equivalente Thévenin



Condensador conectado a un equivalente Norton

Para generalizar la solución de estos cuatro posibles circuitos, suponemos que $x(t)$ representa la cantidad desconocida, asignándole cuatro valores posibles. 6.44

Estos valores pueden representar la corriente o la tensión en las terminales de una bobina o la corriente o la tensión en las terminales de un condensador. La ecuación diferencial que describe cualquiera de los cuatro circuitos es:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = K, \tag{4.1}$$

donde el valor de la constante K puede ser 0. Debido a que las fuentes en el circuito son tensiones y/o corrientes constantes, el valor general de x será constante, esto es, el valor general debe cumplir la ecuación anterior, y cuando x alcanza su valor final, la derivada dx/dt debe ser 0. 6.45

Resolvemos la ecuación $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = K$ separando las variables, empezando por la solución para la primera derivada.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-x}{\tau} + K = \frac{-(x - K\tau)}{\tau} = \frac{-(x - x_f)}{\tau}. \tag{4.2}$$

Multiplicando ambos miembros por dt:

$$\frac{dx}{x - x_f} = \frac{-1}{\tau} dt. \tag{4.3}$$

Ahora se integra la ecuación y se emplea t_0 como límite inferior y t como límite superior. 6.46

El tiempo t_0 corresponde al momento de la conmutación u otro cambio. Anteriormente, se supuso que $t_0 = 0$, pero este cambio permite que la conmutación ocurra en cualquier momento. Utilizando u y v como variables de integración se obtiene:

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{du}{u - x_f} = -\frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t} dv. \tag{4.4}$$

El resultado es:

$$x(t) = x_f + [x(t_0) - x_f] e^{-(t - t_0)/\tau} \tag{4.5}$$

6.47

El resultado se puede expresar en general como

$$\text{Variable desconocida} = \text{Valor final variable} + \left[\text{Valor inicial variable} - \text{Valor final variable}\right] \text{x} \; \text{e}^{-\frac{(t - \text{tiempo conmut.})}{\text{cte. tiempo}}}$$

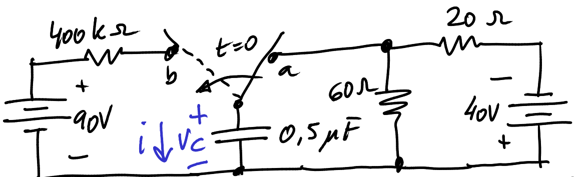
6.48

Pasos a seguir

- Identificar la variable de interés para el circuito: Para circuitos *RC* resulta más conveniente elegir la tensión capacitiva; en el caso de circuitos *RL*, es mejor la corriente inductiva.
- Determinar el valor inicial de la variable, el cual corresponde al valor en t_0: Si se elige la tensión capacitiva o la corriente inductiva como la variable de interés, no es necesario distinguir entre $t = t_0^-$ y $t = t_0^+$ (esto es debido a que ambas son variables continuas). Si se elige otra variable, es necesario recordar que el valor inicial se define en $t = t_0^+$.
- Calcular el valor final de la variable, el cual es el que corresponde cuando $t \to \infty$.
- Calcular la constante de tiempo para el circuito.

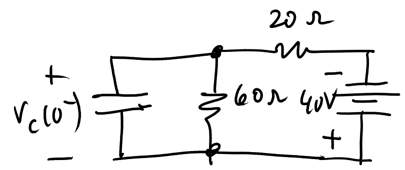
6.49

Ejemplo 7.7 El interruptor en el circuito de la figura ha estado mucho tiempo en la posición "a". En t=0 pasa a la posición "b".



a) ¿Cuál es el valor inicial de v_C?

En $t=0^-$, el circuito está conectado en "a":

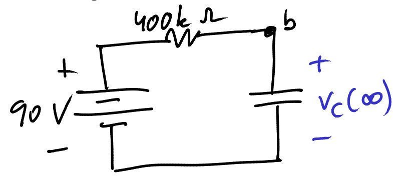


El condensador actúa como un circuito abierto, así que $V_c(0^-)$ se determina con el divisor que forman las resistencias:

$$V_c(0^-) = -40 \cdot \frac{60}{60+20} = -30V$$

b) ¿Cuál es el valor final de v_c?

El circuito en "b" para $t \to \infty$ tiene el condensador con corriente cero:



No hay caída de tensión en la resistencia. Por tanto,

$$\underline{v_c(\infty) = 90\,V}$$

c) ¿Cuál es la constante de tiempo cuando el interruptor está en "b"?

El circuito en "b" tiene una resistencia de 400kΩ y el condensador de 0,5μF en serie. Por tanto:

$$\tau = RC = 400 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6} = 0{,}2\,s$$

$$\underline{\tau = 0{,}2\,s}$$

d) ¿Cuál es la expresión de $v_c(t)$ para $t \geq 0$?

Usando la expresión

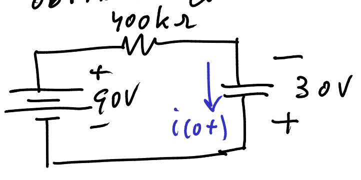
$$x(t) = x_f + [x(t_0) - x_f]e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}},$$

$$v_c(t) = 90 + (-30 - 90)e^{-5t} = \underline{90 - 120\,e^{-5t}\,V}, \quad t \geq 0$$

e) ¿Cuál es la expresión para $i(t)$ cuando $t \geq 0$?

La cte de tiempo es la misma. Sólo hay que calcular los valores inicial y final de $i(t)$.

$i(0^+)$ se obtiene con el interruptor en "b":



Usando la ley de Ohm:

$$i(0^+) = \frac{90 + 30}{400 \cdot 10^3} = 300\,\mu A$$

La corriente final ya se estableció que era cero:

$$i(\infty)=0$$

$$i(t) = 0 + (300-0)\,e^{-5t} = 300\cdot e^{-5t}\ \mu A \quad , t \geq 0^+$$

También se puede obtener a partir de

$$i(t) = C\frac{dv_c}{dt}.$$

f) ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que $v_c=0$ desde que se cambia el interruptor de "a" a "b"?

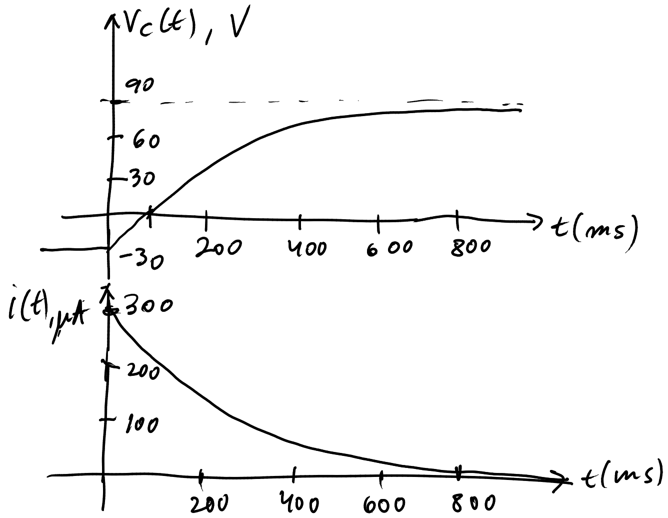
Se plantea la ecuación $v_c(t)=0$

$$v_c(t)=0 \Rightarrow 0 = 90 - 120\,e^{-5t}$$

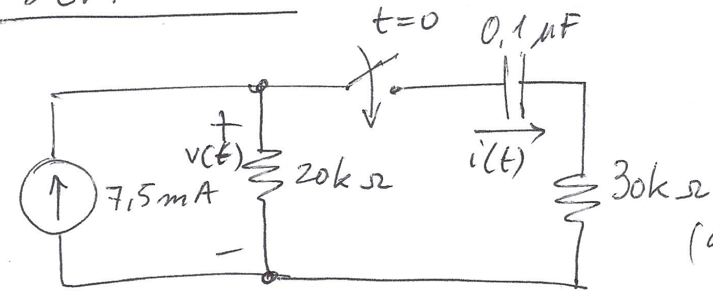
$$90 = 120\,e^{-5t} \Rightarrow t = \frac{1}{5}\ln\frac{120}{90} =$$

$$= \frac{1}{5}\ln\frac{4}{3} = \underline{\underline{57{,}43\,ms}}$$

g) Dibujar $v_c(t)$ e $i(t)$



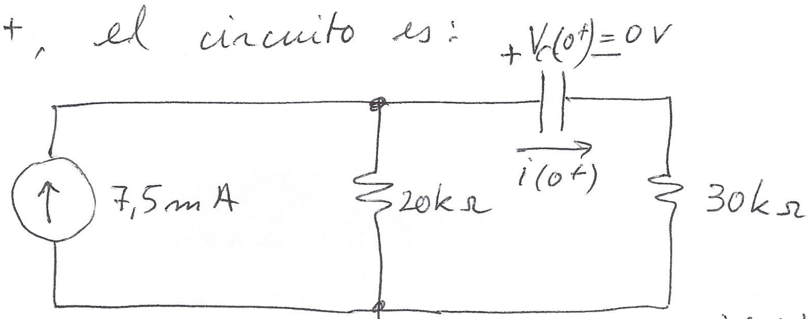
EJEMPLO 7.8



· La carga inicial es cero.

(a) $i(t)$ para $t \geq 0^+$

El valor inicial de $i(t)$ es $i(0^+)$. En $t=0^+$, el circuito es:



Usando el divisor de corriente, $i(0^+) = 7{,}5 \frac{20}{20+30} \text{mA} \Rightarrow$

$i(0^+) = 3 \text{ mA}$

→ El valor final de $i(t)$ es cero, puesto que al pasar mucho tiempo alcanzamos la situación ~~p~~ermanente ($d/dt = 0$), así que todas las tensiones y corrientes son constantes:

$$i(t) = C\frac{dV_c}{dt} = 0 \quad , \text{ porque } V_c = \text{cte}.$$

$$\underline{i_f = 0}$$

→ La cte de tiempo se determina como:

$\tau = R_{Th} C$, donde R_{Th} es la resistencia equivalente de Thevenin vista desde los extremos del condensador:

$$R_{Th} = 30k\Omega + 20k\Omega = 50k\Omega$$

$$\tau = R_{Th} \cdot C = 50 \cdot 10^3 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-6} =$$
$$= 5\,ms.$$

$$i(t) = 0 + (3 - 0)\, e^{-\frac{t}{5 \cdot 10^{-3}}} = \underline{\underline{3 e^{-200t}\ mA}}$$
$$i_f + (i_{inic} - i_f)\, e^{-t/\tau}$$

b) Calcular $v(t)$ cuando $t \geq 0^+$.

Usando la LTK,

$$v(t) = V_c(t) + i(t) \cdot 30\,k\Omega \Rightarrow$$

~~$V_c(t) =$~~

Tension final de $V_c(t)$:

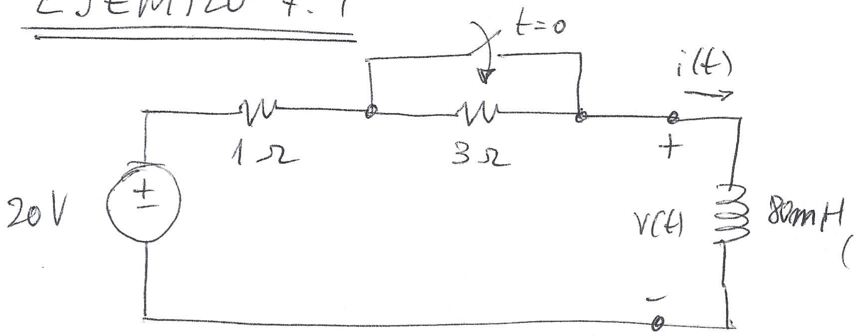
Como $i_f = 0$, en el condensador tendremos: $V_f = 7{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^3 = 150\,V$

$$V_c(t) = 150 + (0 - 150)\, e^{-200t} =$$
$$= 150 - 150 e^{-200t}\ V,\quad t \geq 0^{*}$$

$\boxed{\text{Es valido para } t \geq 0}$

$$V(t) = V_c(t) + i(t) \cdot 30 \cdot 10^3 =$$
$$= 150 - 150 e^{-200t} + 30 \cdot 3\, e^{-200t} =$$
$$= \underline{\underline{150 - 60 e^{-200t}\ V,\quad t \geq 0^+}}$$

EJEMPLO 7.9



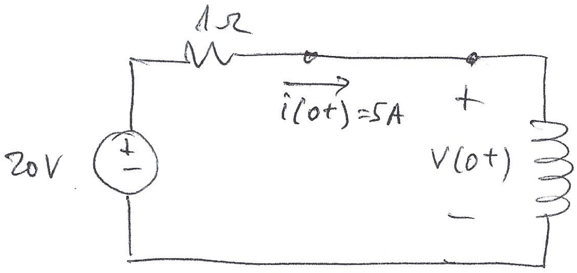
(a) Calcular $v(t)$, para $t \geq 0^+$.

(b) Calcular $i(t)$ para $t \geq 0$.

(a) Se supone que el circuito lleva mucho tiempo en la misma situación. Entonces $V(t) = 0$, y la corriente sería:

$i(t) = \frac{20}{4} = 5A$. Al ~~[illegible]~~ el interruptor, $i(0^-) = i(0^+) = 5A$

Con esta corriente, $V(0^+)$ se determina como:



$20 = V(0^+) + 1 \cdot 5 \Rightarrow V(0^+) = 15V$

El valor final de V es cero, cuando se haya cargado la bobina.

La cte de tiempo es $\tau = \frac{L}{R} = \frac{80 \cdot 10^{-3}}{1} = 80ms$

$$V(t) = 0 + (15 - 0)\, e^{-t/80\cdot 10^{-3}} =$$
$$= 15\, e^{-12{,}5t}\ A,\ t \geq 0^+$$

b) Sabemos el valor inicial de $i(t)$:

$$i(0^+) = 5\,A$$

El valor final será, con la ley de Ohm:

$$i_f = \frac{20}{1} = 20\,A$$, ya que finalmente no cae tensión en la bobina.

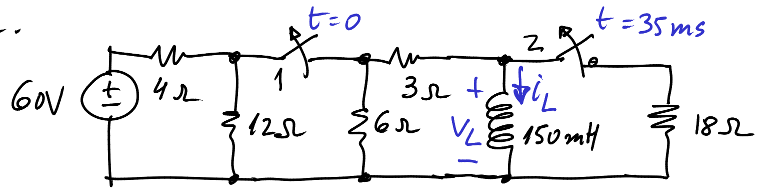
$$i(t) = 20 + (5-20)e^{-12,5t}\,A =$$

$$= 20 - 15\,e^{-12,5t}\,A \quad , t \geq 0$$

Se cumple que $v(t) = L\dfrac{di}{dt} = 80\cdot 10^{-3}\left[15(12,5)e^{-12,5t}\right]$

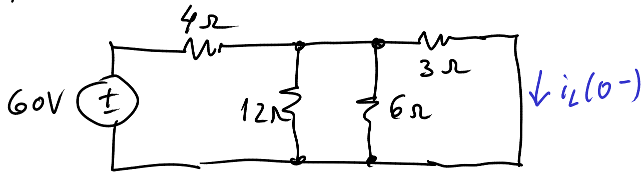
$$= 15\,e^{-12,5t}\,V, \; t \geq 0^+$$

Ejemplo 7.11 Los dos interruptores del circuito han estado cerrados mucho tiempo. En $t=0$, se abre el interruptor 1. Entonces, 35 ms más tarde, se abre el interruptor 2.



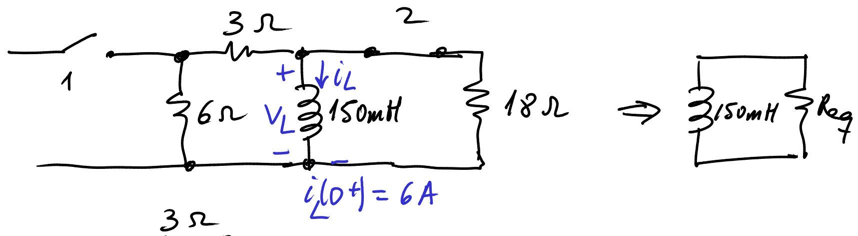
a) Calcular $i_L(t)$ para $0 \leq t \leq 35\,ms$

Para $t<0$, el circuito equivalente es:

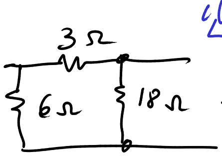


Usando transformaciones de fuente, por ejemplo, se determina $i_L(0^-) = 6A$.

Una vez que se abre el interruptor 1, la bobina no es ya un cortocircuito:



Req ⇒



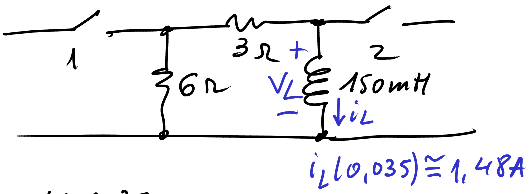
$$\leftarrow Req = (6+3) \,\|\, 18 = \frac{9 \cdot 18}{9+18} = 6\ \Omega$$

$$\tau = \frac{L}{Req} = \frac{0.15}{6} = 25\,ms$$

$$\underline{i_L(t) = 6e^{-40t} \ A, \quad 0 \le t \le 35\,ms}$$

b) Calcular i_L para $t \geq 35\,ms$.

Cuando $t \geq 35\,ms$, el circuito se transforma en:



$$i_L(0{,}035) = 6\,e^{-40 \cdot 0{,}035} \simeq 1{,}48\,A.$$

Ahora cambia τ, porque la nueva $Req = 6+3 = 9\Omega$

$$\tau = \frac{L}{9} = \frac{0{,}15}{9} = 16{,}67\,ms$$

$$i_L(t) = 1{,}48\,e^{-\frac{(t-0{,}035)}{16{,}67 \cdot 10^{-3}}} = 1{,}48\,e^{-60(t-0{,}035)} \ A, \quad t \geq 35\,ms$$

c) ¿Qué porcentaje de la energía inicial de la bobina se disipa en la resistencia de 18 Ω?

La resistencia de 18 Ω sólo está conectada entre 0 y 35 ms. Usando el resultado de a), podemos calcular la tensión en la resistencia, que es igual que v_L:

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} = 0.15\cdot\frac{d}{dt}\left(6e^{-40t}\right) = -36e^{-40t}\,V, \quad 0 \le t \le 35ms$$

La potencia es:

$$p = \frac{v_L^2}{18} = 72e^{-80t}\,W, \quad 0<t<35ms$$

La energía disipada es:

$$w = \int_0^{35ms} p(t)dt = \int_0^{0{,}035} 72e^{-80t}dt =$$

$$= \frac{72}{-80}e^{-80t}\Big]_0^{0{,}035} = 0{,}9\left(1-e^{-2{,}8}\right) = 845{,}27\,mJ$$

La energía almacenada en la bobina es:

$$w_i = \frac{1}{2}L\,i_L(0^+)^2 = \frac{1}{2}\,0.15\cdot 6^2 = 2700\,mJ$$

El porcentaje es:

$$\frac{\text{Energía disipada en } R=18\,\Omega}{\text{Energía inicial}}\cdot 100 = \frac{845{,}27}{2700}\times 100 = 31{,}31\%$$

d) Repetir estos cálculos para $R = 3\,\Omega$

$$V_{3\Omega} = \frac{V_L}{9}\cdot 3 = -12\cdot e^{-40t}$$

$$W_{3\Omega} = \int_0^{0{,}035}\frac{144e^{-80t}}{3}dt = 563{,}51\,mJ$$, para los 35 ms primeros.

A partir de $t = 35\,ms$, cambia $i_{3\Omega}$:

$$i_{3\Omega} = i_L = \left(6e^{-1,4}\right) e^{-60(t-0,035)} \text{ A}.$$

Para $t > 35\,ms$

$$w_{3\Omega} = \int_{0,035}^{\infty} i_{3\Omega}^2 \cdot 3\,dt = 54{,}73\,mJ$$

La energía total es:

$$w_{3\Omega}(total) = 563{,}51 + 54{,}73 = 618{,}24\,mJ.$$

El porcentaje de la energía inicial es:

$$\frac{w_{3\Omega}(total)}{w_i} \cdot 100 = \frac{618{,}24}{2700} \cdot 100 = 22{,}9\,\%$$

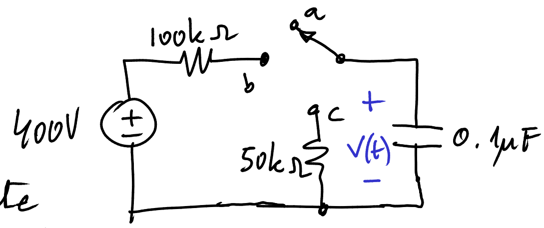
e) Repetir los cálculos para la resistencia de $6\,\Omega$.

Esta resistencia está en serie con la de $3\,\Omega$ a partir de $t > 0$. La energía disipada será el doble de la de $3\,\Omega$:

$$w_{6\Omega}(total) = 1236{,}48\,mJ \quad y$$

el porcentaje es del $45{,}8\,\%$.

Ejemplo 7.12



El condensador sin carga está conectado inicialmente a la posición "a". En t=0 se mueve a "b", donde permanece 15 ms. Después se mueve a "c", donde permanece indefinidamente.

a) Calcular la tensión en el condensador.

$V(0^-) = V(0^+) = 0$, por estar descargado.

Si se mantuviese para siempre el interruptor en "b", la tensión final sería de 400V en el condensador.

En "b", $\tau = RC = 100\cdot10^3 \cdot 0{,}1\cdot10^{-6} = 10\,ms$

La expresión de $v(t)$ para $0 \le t \le 15ms$ es:

$$V = 400 + (0-400)e^{-100t} = \underline{\underline{400 - 400e^{-100t}}}\ V,\quad 0 \le t \le 15ms$$

A partir de $t = 15ms$, cambia la cte de tiempo:

$$\tau' = R'C = 50\cdot10^3 \cdot 0{,}1\cdot10^{-6} = 5ms$$

Para esta posición, la tensión final es cero.

La tensión inicial es ahora $v(15ms)$:

$$v(15ms) = 400 - 400e^{-1.5} = 310{,}75\ V.$$

Para $t \geq 15ms$:

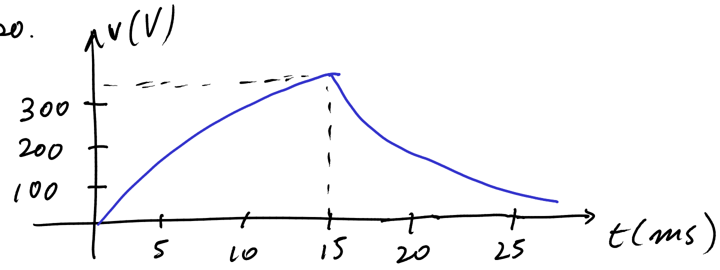
$$v(t) = 0 + (310{,}75 - 0)\,e^{-200(t-0.015)} =$$

$$= \underline{\underline{310{,}75\,e^{-200(t-0.015)}\ V}},\quad t \geq 15ms.$$

Esta expresión sólo es válida para $t \geq 15ms$.

$t_0 = 15\,ms$ en este caso.

b) Dibujar la tensión del condensador en función del tiempo.



c) ¿Cuándo será la tensión igual a 200V?

Por la gráfica se ve que esto puede ocurrir antes y después de 15 ms. Para $t < 15ms$ se usa la primera expresión:

$$V(t_1) = 200 = 400 - 400 e^{-100 t_1} \rightarrow \underline{\underline{t_1 = 6{,}93 ms}}$$

$$V(t_2) = 200 = 310{,}75 e^{-200(t_2 - 0{,}015)} \rightarrow \underline{\underline{t_2 = 17{,}2 ms}}$$

5. Respuesta no acotada

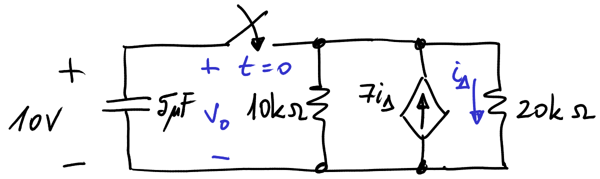
Respuesta no acotada

En algunas ocasiones podemos considerar circuitos en los que la respuesta, tensión o corriente, aumenta exponencialmente en vez de disminuir. Este tipo de respuesta se conoce como **no acotada**, porque no conocemos a priori el valor máximo. ¿Cómo es posible que se produzcan este tipo de respuestas? Sólo se pueden dar si el circuito incluye fuentes dependientes que lo permitan. 6.50

Formulación

En la formulación del método, la única diferencia es que el circuito equivalente conectado a la bobina o condensador tendrá una resistencia negativa. Este circuito equivalente no representa un circuito real y aparece por las fuentes dependientes del circuito. Para resolver la ecuación diferencial no se puede usar el método general del apartado anterior. Se usará la **separación de variables**. 6.51

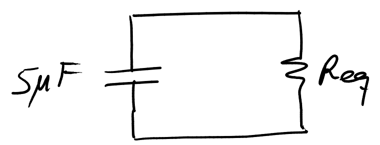
Ejemplo 7.13



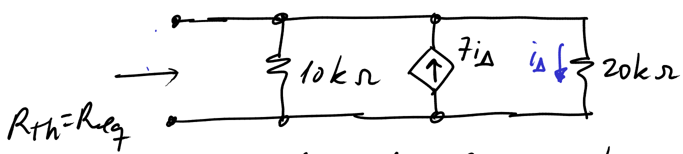
a) La tensión inicial del condensador es de 10 V. Calcular v_o para $t \geq 0$.

b) Suponiendo que el condensador se destruye (y queda en cortocircuito) cuando la tensión en sus extremos es de 150V, ¿cuántos ms pasan antes de que ocurra esto?

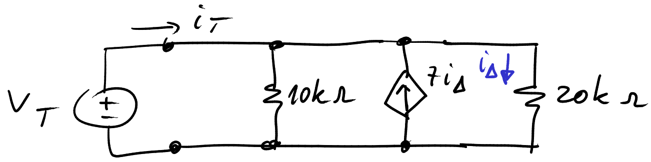
a) A partir de $t=0$, hay que reducir el circuito a:



La R_{eq} es la R_{Th} del circuito



Se aplica una fuente de prueba y se calcula el cociente $V_T / i_T = R_{Th} = R_{eq}$:



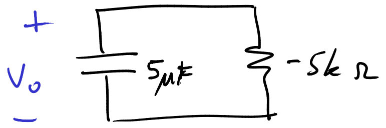
Usando la LCK

$$i_T = \frac{V_T}{10 \cdot 10^3} + \frac{V_T}{20 \cdot 10^3} - 7 i_\Delta$$

Sustituyendo $i_\Delta = \frac{V_T}{20 \cdot 10^3}$

$$i_T = \frac{V_T}{10 \cdot 10^3} + \frac{V_T}{20 \cdot 10^3} - 7\left(\frac{V_T}{20 \cdot 10^3}\right) \Rightarrow R_{eq} = R_{Th} = \frac{V_T}{i_T} = -5k\Omega$$

Con esta resistencia, se llega a:



$t > 0$

La ecuación diferencial es:

$$5\cdot 10^{-6}\frac{dv_0}{dt} - \frac{v_0}{5}\cdot 10^{-3} = 0$$

Simplificando:

$$\frac{dv_0}{dt} - 40 v_0 = 0 \Rightarrow v_0(t) = 10\, e^{40t}\ V,\ t > 0$$

b) $V_0 = 150V \Rightarrow 150 = 10\, e^{40t}$

$$40t = \ln 15$$

$$t = 67{,}7\ ms$$

6. Respuesta al impulso unidad de circuitos y sistemas de primer orden

De vuelta al impulso

Aunque $\delta(t)$ no existe en la práctica es útil para comprender los circuitos. Supondremos circuitos que se pueden alimentar con estas funciones. En una bobina, $i_L(t) \neq \delta(t)$, pero sí podríamos imaginar $v_L(t) = \delta(t)$. Se produciría un salto en $i_L(t)$:

$$i_L(0^+) - i_L(0^-) = \frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = \frac{1}{L}. \tag{6.1}$$

Igualmente, en un condensador, con $i_C(t) = \delta(t)$:

$$v_C(0^+) - v_C(0^-) = \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = \frac{1}{C}. \tag{6.2}$$

En estos casos $i_L(0^-) \neq i_L(0^+)$ y $v_C(0^-) \neq v_C(0^+)$. 6.52

Cálculo de $h(t)$

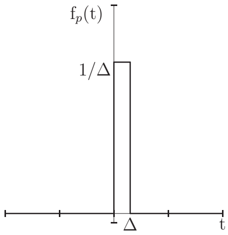
La respuesta al impulso unidad o respuesta impulsional es la salida de un circuito cuando lo alimentamos con una fuente de valor $\delta(t)$. En los cálculos, se supone que no hay energía almacenada inicialmente. La variable de salida (tensión o corriente) se la suele denotar por $h(t)$. Se cumple que la respuesta impulsional es la derivada de la respuesta escalón: si derivamos la entrada, obtenemos a la salida la derivada. 6.53

La respuesta impulsional, una vez determinado el valor inicial de i_L o v_C se obtiene como la respuesta natural. Hay que observar lo que ocurre en $t = 0$, teniendo en cuenta las condiciones que imponen los elementos acumuladores de energía. 6.54

7. Convolución

Muestreo

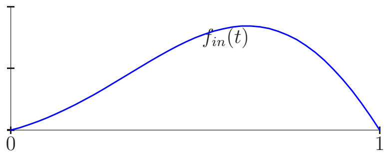
Al tratar el impulso unidad se consideró como el caso límite de un pulso cuadrado de duración Δ y área unidad. En la figura siguiente se representa esta señal.



Podemos suponer que esta señal representa la tensión o la corriente de alimentación de un circuito lineal. ¿Será muy diferente la salida de un circuito con esta entrada a la respuesta impulsional? En la práctica son parecidas si Δ es mucho menor que la menor constante de tiempo del circuito. 6.55

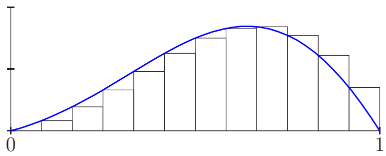
Aproximación de la entrada

Supongamos que el circuito está alimentado por una fuente con una función genérica $f_{in}(t)$.



6.56

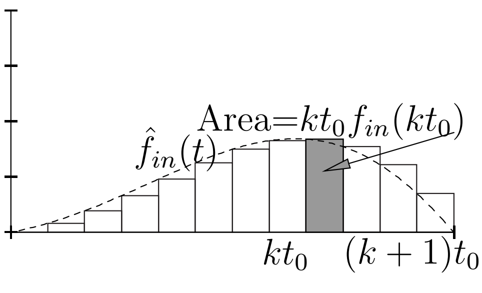
Utilizando las muestras de una señal, en general aproximamos esta función por otra $\hat{f}_{in}(t)$. Los valores en $t = kt_0$ de la función se utilizan para reemplazar la señal de entrada por su aproximación.



6.57

Reduciendo la duración

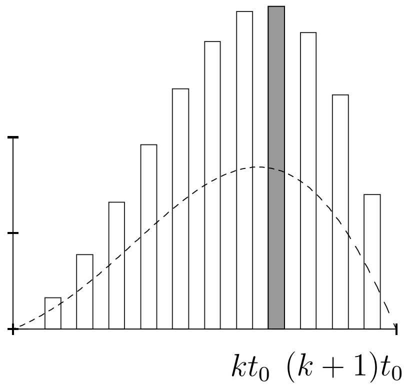
La función $\hat{f}_{in}$ se aproximará a f si los rectágulos son estrechos. Consideremos sólo un rectángulo. Su área será $t_0 \cdot f_{in}(kt_0)$.



6.58

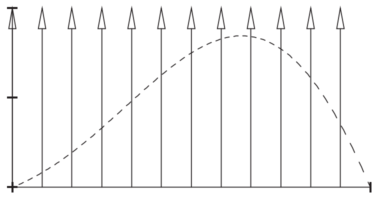
Podemos pensar en reducir la anchura del rectángulo sombreado a la vez que se aumenta la altura. Si la anchura de los pulsos es mucho menor que la constante de tiempo del circuito, la solución no variará mucho. 6.59

La señal, tras reducir la anchura de los rectángulos manteniendo el área, será un conjunto de pulsos más altos:



6.60

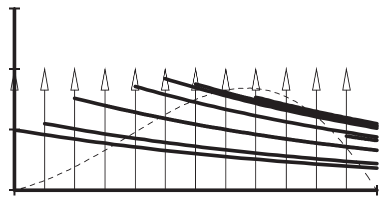
Este proceso se puede continuar hasta que la altura de cada pulso sea infinita y la anchura infinitesimal. Hemos llegado de nuevo a la función $\delta(t)$.



6.61

Aplicando las deltas a un circuito

El área correspondiente a un impulso en, por ejemplo, $t = \tau$ es $f_{in}(\tau)$ o, lo que es lo mismo, $f_{in}(\tau)\Delta\tau$. Ahora suponemos que este tren de impulsos se aplica a la entrada de un circuito. En la salida tendremos replicas de la respuesta impulsional desplazadas y multiplicadas por el valor $f_{in}(\tau)$.



6.62

Para cada impulso, la entrada es: $f_{in}(\tau)\delta(t-\tau)\Delta\tau$, mientras que la salida es: $f_{in}(\tau)h(t-\tau)\Delta\tau$. En la figura lo que tenemos realmente es un sumatorio de funciones $\delta(t)$ desplazadas. La salida será, por tanto, un sumatorio de respuestas impulsionales desplazadas:

$$\text{Entrada} = \sum_{\tau} f_{in}(\tau)\delta(t-\tau)\Delta\tau \qquad \text{Salida} = \sum_{\tau} f_{in}(\tau)h(t-\tau)\Delta\tau \tag{7.1}$$

6.63

Finalmente, para que la aproximación sea tan buena como sea posible, consideremos $t_0 \to 0$. En el límite, $\Delta\tau \to d\tau$ y $\sum \to \int$. Utilizando la definición de $\delta(t)$, la entrada es:

$$f_{in}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{in}(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{7.2}$$

6.64

La expresión de la convolución

La salida $y(t)$ es, por lo tanto:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{in}(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{7.3}$$

La forma más común de expresar esta operación es mediante un asterisco, que no debe confundirse con el producto:

$$y(t) = f_{in}(t) * h(t) \tag{7.4}$$

Se dice que $y(t)$ es la convolución de $f_{in}(t)$ y $h(t)$. 6.65

Esta operación es conmutativa (se puede demostrar con un cambio de variable en la integral), por lo que se puede escribir:

$$y(t) = f_{in}(t) * h(t) = h(t) * f_{in}(t) \tag{7.5}$$

6.66

Simplificaciones

Una simplificación importante es que trabajaremos con circuitos lineales que son *causales*, así que la integral de convolución será entre 0 y t. Otra simplificación que se utiliza mucho en la práctica es la interpretación gráfica que se hace de la convolución. 6.67