Tema 5
Elementos acumuladores de energía

Versión imprimible del tema 5. Rafael Gómez Alcalá, Escuela Politécnica, Universidad de Extremadura

5.1

Índice

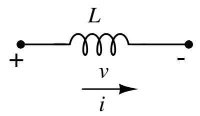
1. Bobinas

Introducción

La inductancia es el parámetro del circuito que se usa para describir una bobina.

$$v = L\frac{di}{dt} \tag{1.1}$$

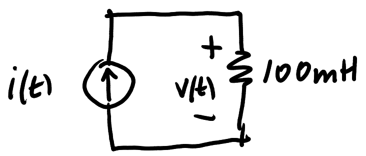
La tensión en las terminales de una bobina es proporcional a la tasa de cambio en el tiempo de la corriente de la bobina. Si la corriente es constante, la tensión por la bobina ideal es 0.



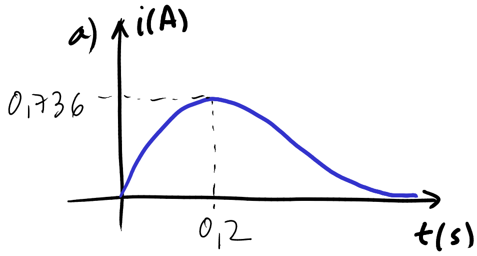
5.2

La bobina se comporta como un corto circuito en la presencia de una corriente constante o dc. La corriente no puede cambiar instantáneamente en una bobina; no es posible que la corriente cambie una cantidad finita en el tiempo 0. En la ecuación anterior vemos que este cambio requeriría una tensión infinita y esto, no es posible. Cuando alguien abre el interruptor de un circuito inductivo en un sistema real, la corriente en un principio continúa circulando en el aire a través del interruptor, es lo que se llama arqueo. El arco a través del interruptor evita que la corriente disminuya a 0 de forma instantánea. 5.3

Ejemplo 6.1



a)



$$i(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 10te^{-5t}\,A & t>0 \end{cases}$$

b) Cálculo del máximo : $\frac{di}{dt} = 0$

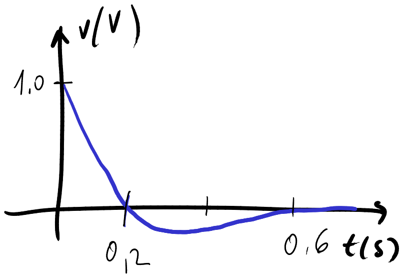
$$\frac{di}{dt} = 10\left(-5te^{-5t} + e^{-5t}\right) = 10\,e^{-5t}(1-5t)$$

$$\frac{di}{dt} = 0 \quad \text{si} \quad 1-5t=0 \Rightarrow \underline{t = 0{,}2\,s}$$

c) Valor de la tensión : $v(t) = L\frac{di}{dt} = 0.1 \cdot 10e^{-5t}(1-5t)$

$$\underline{v(t) = e^{-5t}(1-5t)\ ,\ t>0}$$

d)



e) ¿Ocurren el máximo de tensión y de corriente a la vez?

No: la tensión es proporcional a $\frac{di}{dt}$, no a $i(t)$.

f) ¿Cuando cambia la polaridad de $v(t)$?

Cuando $t=0,2s$, que es cuando $\frac{di}{dt}=0$.

g) ¿Cambia instantáneamente la tensión en la bobina? ¿Cuando?

En $t=0$, la tensión pasa de ser 0 a 1.

Corriente en una bobina debida a la tensión

La tensión entre los terminales de la bobina en función de la corriente es:

$$v = L\frac{di}{dt} \tag{1.2}$$

Pero también se puede expresar la corriente como una función de la tensión con lo cual,

$$vdt = L\left(\frac{di}{dt}\right)dt \tag{1.3}$$

Multiplicando la derivada de i con respecto a t por diferencial de t se obtiene un diferencial de i, con lo cual:

$$v\,dt = L\,di \tag{1.4}$$

5.4

Si integramos los dos lados de la ecuación y, por conveniencia, los intercambiamos, tendremos:

$$L\int_{i(t_0)}^{i(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v\,d\tau \tag{1.5}$$

Usamos x y τ como variables de integración, mientras que i y t son los límites de las integrales. Ahora, podemos hacer:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i(t_0) \tag{1.6}$$

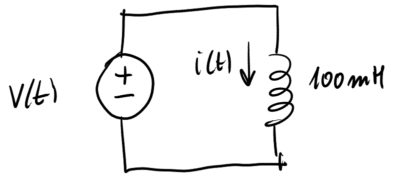
$i(t)$ es la corriente en un instante t, mientras que i(t_0) es el valor de la corriente de la bobina cuando se inicia la integración, esto es, t_0. 5.5

A veces, en la práctica, t_0 es 0, por lo cual la ecuación será:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v\,d\tau + i(0) \tag{1.7}$$

La ecuación $vdt = Ldi$ expresa la tensión como una función de la corriente. En ambas ecuaciones la dirección de referencia para la corriente es la dirección de la caída de tensión entre los terminales. La corriente $i(t_0)$ lleva su propio signo algebraico. Si la corriente inicial está en la misma dirección que la de referencia para i, ésta es una cantidad positiva. Si la corriente inicial está en la dirección opuesta, es una cantidad negativa. 5.6

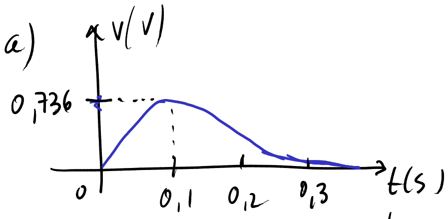
Ejemplo 6.2



$v = 0 \quad t < 0$

$v = 20te^{-10t} \quad t > 0$

a)



b)

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(x)dx + i(0)$$

En $t = 0$, $i(0) = 0$,

$$i(t) = \frac{1}{0,1}\int_0^t 20xe^{-10x}dx$$. Esta integral se resuelve por partes, haciendo:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{20}{0,1}x \\ dv &= e^{-10x}dx \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} du &= \frac{20}{0,1}dx \\ v &= \frac{e^{-10x}}{-10} \end{aligned}$$

$$i(t) = u\cdot v\Big]_0^t - \int_0^t v\,du = \frac{20}{0{,}1}\, x\, \frac{e^{-10x}}{-10}\Big]_0^t - \int_0^t \frac{e^{-10t}}{-10}\cdot\frac{20}{0{,}1}\,dx =$$

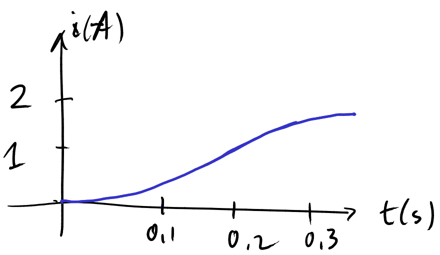
$$= -20te^{-10t} - 20\left[\frac{e^{-10x}}{10}\right]_0^t = -20te^{-10t} - 2e^{-10t} + 2 =$$

$$= 2(1 - 10te^{-10t} - e^{-10t})\ \text{A}\ ,\ t>0 .$$

Este resultado también está en el Apéndice G del libro:

$$\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$$

c)



Potencia y energía en la bobina

Las relaciones de potencia y energía de una bobina se deducen directamente de las relaciones de corriente y tensión. Si la referencia de la corriente corresponde a la caída de tensión entre los terminales de la bobina, la potencia es:

$$p = vi \tag{1.8}$$

Si la tensión de la bobina se expresa como una función de la corriente, la ecuación anterior pasa a ser:

$$p = Li\frac{di}{dt} \tag{1.9}$$

Esta ecuación es útil para expresar la energía almacenada en la bobina. 5.7

Expresamos la corriente en términos de la tensión:

$$p = v\left[\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i(t_0)\right] \tag{1.10}$$

La potencia es la derivada de la energía con respecto al tiempo, por lo cual:

$$p = \frac{dw}{dt} = Li\frac{di}{dt} \tag{1.11}$$

Multiplicando ambos miembros por un tiempo diferencial, nos queda:

$$dw = Lidi \tag{1.12}$$

5.8

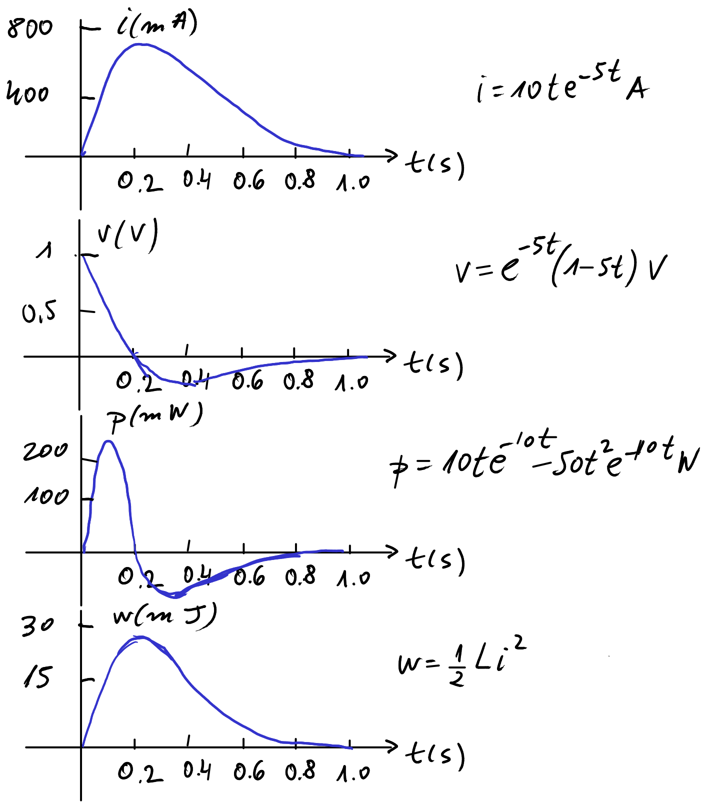
Integramos ambos lados sabiendo que la referencia para la energía 0 corresponde a una corriente 0 en la bobina. De tal modo,

$$\int_0^w dx = L\int_0^i y\,dy \tag{1.13}$$

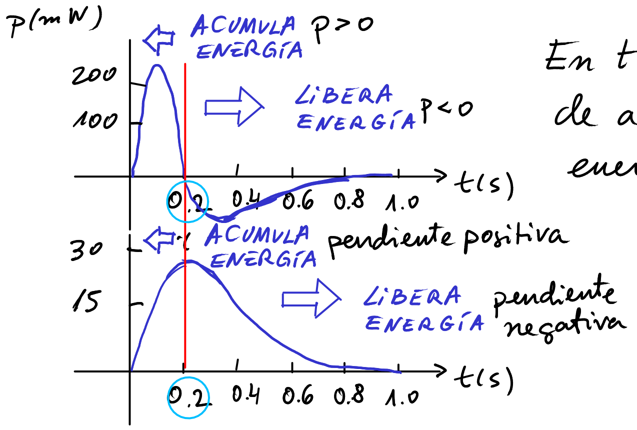
$$w = \frac{1}{2}Li^2 \tag{1.14}$$

La energía está en Julios, la inductancia en Henrios y la corriente en Amperios. 5.9

Ejemplo 6.3



b) c)



En $t = 0.2$ s pasa de acumular energía a liberarla

d) ¿Energía máxima acumulada en la bobina?

Ocurre cuando la corriente es máxima.

En el Ejercicio 1 se obtuvo

$$i_{max} = 0{,}736 \text{ A} \longrightarrow \underline{\underline{W_{max} = 27{,}07 \text{ mJ}}}$$

e) Calcular las integrales:

$$\int_0^{0,2} p\,dt \quad \text{y} \quad \int_{0,2}^{\infty} p\,dt$$

$$\rightarrow \int_0^{0,2} p\,dt = 10\left[\frac{e^{-10t}}{100}(-10t-1)\right]_0^{0,2} -$$

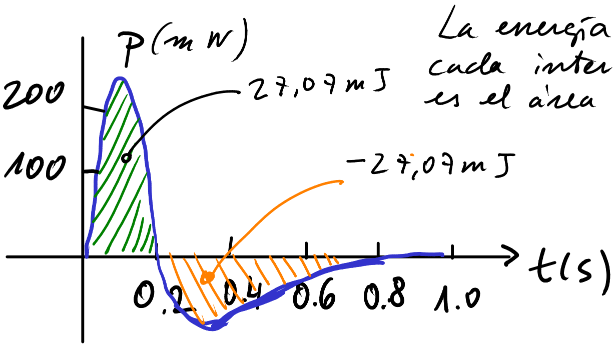
$$-50\left\{\frac{t^2 e^{-10t}}{-10} + \frac{2}{10}\left[\frac{e^{-10t}}{100}(-10t-1)\right]\right\}_0^{0,2}$$

$$= 0{,}2\,e^{-2} = 27{,}07 \text{ mJ}$$

$$\int_{0,2}^{\infty} p\,dt = 10\left[\frac{e^{-10t}}{100}(-10t-1)\right]_{0,2}^{\infty} -$$

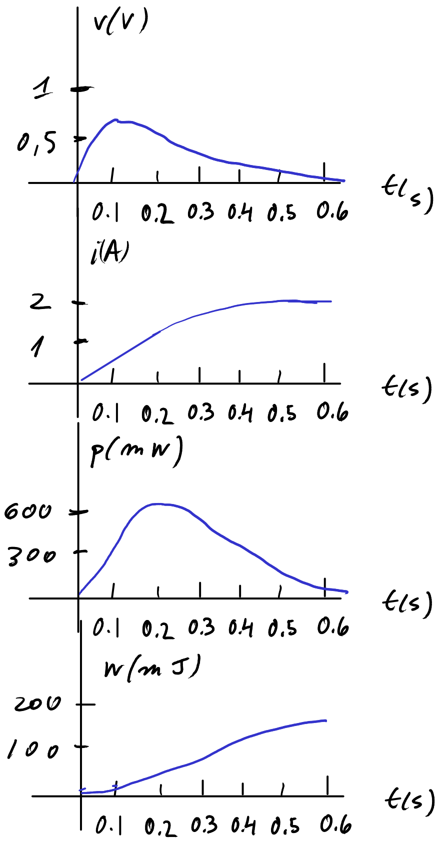
$$-50\left\{\frac{t^2e^{-10t}}{-10} + \frac{2}{10}\left[\frac{e^{-10t}}{100}(-10t-1)\right]\right\}_{0,2}^{\infty}$$

$$= -0,2\,e^{-2} = -27,07 \text{ mJ}$$



La energía de cada intervalo es el área.

(f)



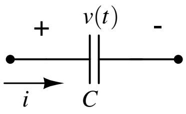
Como la potencia es siempre positiva, siempre estará almacenando energía

g) A medida que aumenta el tiempo, la corriente tiende a 2A. Esto sólo ocurre con las bobinas ideales.

2. Condensador

Capacidad

El parámetro de circuito de la capacidad se representa por una C y se mide en Faradios (F). Un condensador se fabrica con dos cortas placas conductoras paralelas.



Las capacidades de los condensadores se encuentran en valores entre los picofaradios(pF) y los microfaradios(μF).

5.10

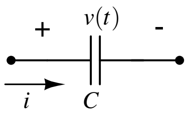
Corriente de desplazamiento

El símbolo gráfico del condensador nos recuerda que la capacidad sucede siempre que los conductores eléctricos están separados por un material dieléctrico o aislante. Esto implica que la carga eléctrica no atraviesa el condensador: el condensador no conduce la corriente eléctrica. Aunque la aplicación de una tensión en las terminales del condensador no puede mover una carga a través del dieléctrico, puede desplazar una carga dentro del mismo. Cuando la tensión varía con el tiempo, la tensión de carga también lo hace, provocando lo que se conoce como **corriente de desplazamiento**. En los terminales, la corriente de desplazamiento es indistinguible de una corriente de conducción. 5.11

La corriente es proporcional a la tasa a la cual la tensión en el condensador varía con el tiempo.

$$i = C\frac{dv}{dt} \tag{2.1}$$

La corriente i se mide en amperios, C se mide en faradios, la tensión v se mide en voltios y el tiempo t en segundos. Esta ecuación refleja la convención pasiva de signos que se muestra a continuación.



5.12

La corriente de referencia está en la dirección de la caída de tensión en el condensador. Si la corriente de referencia está en la dirección del aumento de tensión, la ecuación se escribe con signo menos. 5.13

Circuito abierto

A partir de la ecuación:

$$i = C\frac{dv}{dt} \tag{2.2}$$

se puede establecer que si v=cte $\rightarrow i = 0$. En un condensador no se producen saltos de tensión instantáneos ($i \neq \infty$). Un condensador se comporta como un **circuito abierto** si v =cte. 5.14

Relación $v - i$

También es útil expresar la tensión como una función de la corriente. Para ello, se multiplican ambos miembros por un diferencial de tiempo dt y después se integran:

$$i\,dt = C\,dv \tag{2.3}$$

o bien,

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} dx = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,d\tau \tag{2.4}$$

Si efectuamos la integración en el lado izquierdo de la igualdad:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,d\tau + v(t_0). \tag{2.5}$$

5.15

En muchos casos prácticos, t_0= 0. De este modo:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i\,d\tau + v(0). \tag{2.6}$$

5.16

Potencia y energía

Podemos obtener con facilidad las relaciones de potencia y energía para el condensador. A partir de la definición de potencia:

$$p = vi = Cv\frac{dv}{dt} \tag{2.7}$$

o bien,

$$p = i\left(\frac{1}{C}\int_{t_0}^t i\,d\tau + v(t_0)\right). \tag{2.8}$$

5.17

La combinación de la definición de energía con la ecuación

$$p = vi = Cv\frac{dv}{dt} \tag{2.9}$$

produce:

$$dw = Cv\,dv \tag{2.10}$$

a partir de lo cual

$$\int_0^w dx = C\int_0^v y\,dy \tag{2.11}$$

O bien,

$$w = \frac{1}{2}Cv^2. \tag{2.12}$$

5.18

Ejemplo 6.4

Se aplica esta tensión a un condensador:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 4t & 0 \le t \le 1s \\ 4e^{-(t-1)} & t \ge 1s \end{cases}$$

a) Calcular la corriente, la potencia y la energía.

$i(t) = C\dfrac{dv}{dt}$. Si se deriva en cada intervalo:

$$i = \begin{cases} 0.5\cdot10^{-6}\,0 = 0 & t \le 0 \\ 0.5\cdot10^{-6}\,4 = 2\mu A & 0 \le t \le 1s \\ 0.5\cdot10^{-6}(-4e^{-(t-1)}) = -2e^{-(t-1)}\mu A & t > 1s \end{cases}$$

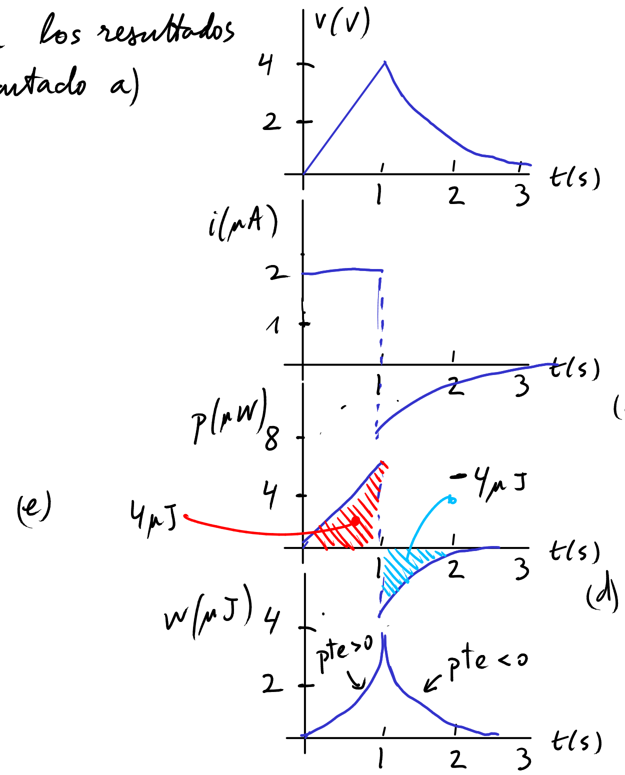
La potencia $p = vi$:

$$p = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 4t \cdot 2 = 8t\ \mu W & 0 \leq t < 1s \\ (4e^{-(t-1)})(-2e^{-(t-1)}) = -8e^{-2(t-1)}\ \mu W & t > 1s \end{cases}$$

La energía $w = \frac{1}{2} C v^2$:

$$w = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{2} 0{,}5 \cdot 16t^2 = 4t^2\ \mu J & 0 \leq t \leq 1s \\ \frac{1}{2} 0{,}5\, e^{-2(t-1)} = 4e^{-2(t-1)}\ \mu J & t \geq 1s \end{cases}$$

b) Dibujar los resultados del apartado a)



(c) En $0 \leq t < 1$, $p > 0$: Acumula energía

(d) En $t > 1$, $p < 0$ Libera energía

Calcular las integrales:

$$\int_0^1 p\,dt \quad y \quad \int_1^\infty p\,dt$$

$$\int_0^1 p\,dt = \int_0^1 8t\,dt = 4t^2\Big]_0^1 = 4\mu J$$

$$\int_1^\infty p\,dt = \int_1^\infty -8e^{-2(t-1)}dt = (-8)\cdot \frac{e^{-2(t-1)}}{-2}\Bigg|_1^\infty = -4\mu J$$

Ejemplo 6.5 Un condensador sin carga se alimenta por un pulso de corriente triangular. El pulso está descrito por:

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 5000t & 0 \leq t \leq 20\mu s \\ 0{,}2 - 5000t & 20 \leq t \leq 40\mu s \\ 0 & t \geq 40\mu s \end{cases}$$

a) Calcular la tensión, la potencia y la energía.

Para $t < 0 \longrightarrow v(t) = 0$, $p(t) = 0$ y $w(t) = 0$

Para $t \leq 20\mu s$

$$v(t) = 5\cdot 10^6 \int_0^t 5000x\,dx + 0 = 12{,}5\cdot 10^9 t^2 \ V$$

$$p(t) = v(t)\, i(t) = 62{,}5\cdot 10^{12} t^3 \ W$$

$$w = \frac{1}{2}Cv^2 = 15,625 \cdot 10^{12} t^4 \text{ J}$$

Para $20\mu s \leq t \leq 40\mu s$

$$v(t) = 5 \cdot 10^6 \int_{20\mu s}^{t} (0,2 - 5000x)\,dx + \underbrace{5}_{v(20\mu s)}$$

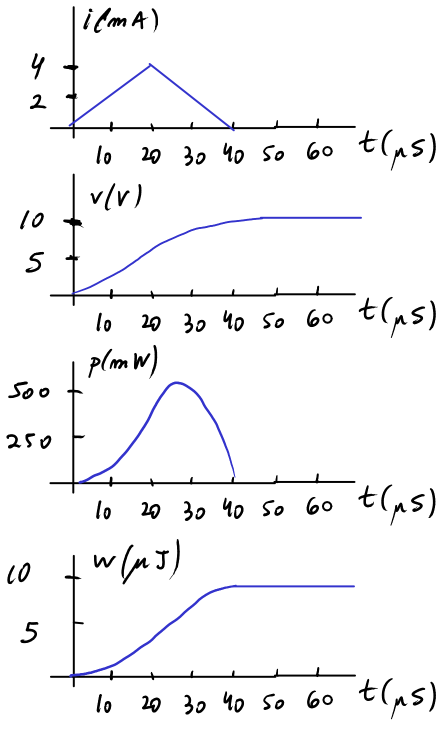
$$= (10^6 t - 12,5 \cdot 10^9 t^2 - 10) \text{ V}$$

$$p(t) = v(t)\,i(t) = (62,5 \cdot 10^{12} t^3 - 7,5 \cdot 10^9 t^2 + 2,5 \cdot 10^5 t - 2) \text{ W}$$

$$w = \frac{1}{2} C v^2 = (15,625 \cdot 10^{12} t^4 - 2,5 \cdot 10^9 t^3 + 0,125 \cdot 10^6 t^2 - 2t + 10^{-5}) \text{ J}$$

para $t \geq 40\mu s$, $v = 10$V, $p = v \cdot i = 0$.

$$w = \frac{1}{2} C v^2 = 10\mu \text{J}$$

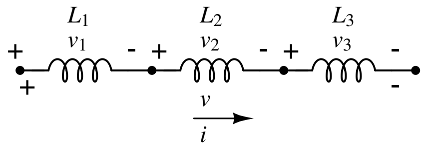


La potencia siempre es positiva → siempre está cargando energía entre 0 y 40μs.
A partir de 40μs, la corriente es cero, la tensión es cte. y la energía queda atrapada en el condensador

3. Asociación de bobinas y condensadores

Las combinaciones de bobinas y condensadores pueden reducirse a una sola bobina o condensador, al igual que se vió con las resistencias.

Bobinas en serie



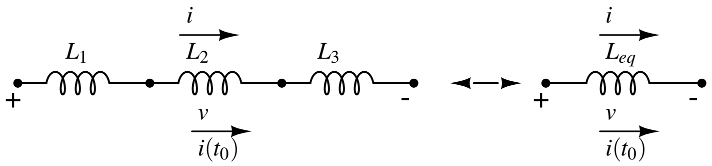
Las bobinas conducen la misma corriente i porque están conectadas en **serie**. Las caídas de tensión para las bobinas individuales son, en función de la corriente i: 5.19

$$v_1 = L_1 \frac{di}{dt} \qquad v_2 = L_2 \frac{di}{dt} \qquad v_3 = L_3 \frac{di}{dt} \tag{3.1}$$

La tensión de la conexión en serie total es la suma de las tensiones:

$$v = v_1 + v_2 + v_3 = (L_1 + L_2 + L_3) \frac{di}{dt} \tag{3.2}$$

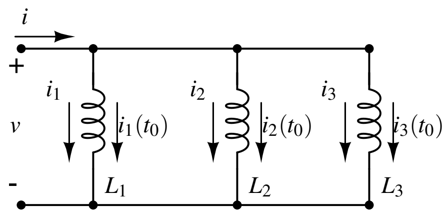
Por tanto, la inductancia equivalente de las bobinas en serie corresponde a la suma de las bobinas individuales. Para n bobinas en serie: $L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + ... + L_n$. Si las bobinas originales conducen la corriente inicial i(t_0), la bobina equivalente conduce la misma corriente inicial.



5.20

Bobinas en paralelo

Las bobinas en paralelo tienen la misma tensión entre terminales. En el circuito equivalente, la corriente en cada bobina es una función de la tensión y de la corriente inicial.



$$i_1 = \frac{1}{L_1} \int_{t_0}^{t} v\, d\tau + i_1(t_0) \tag{3.3}$$

$$i_2 = \frac{1}{L_2} \int_{t_0}^{t} v\, d\tau + i_2(t_0) \tag{3.4}$$

$$i_3 = \frac{1}{L_3} \int_{t_0}^{t} v\, d\tau + i_3(t_0) \tag{3.5}$$

5.21

La corriente de las terminales de las tres bobinas en paralelo es la suma de las corrientes de la bobina:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \tag{3.6}$$

Si sustituimos los valores de cada corriente, nos queda:

$$i = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \right) \cdot \int_{t_0}^{t} v\, d\tau + i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0) \tag{3.7}$$

Con esto, podemos decir:

$$i = \frac{1}{L_{eq}} \int_{t_0}^{t} v\, d\tau + i(t_0) \tag{3.8}$$

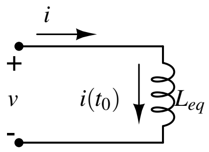
5.22

De lo anterior, deducimos:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \tag{3.9}$$

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0) \tag{3.10}$$

Por tanto, un circuito con 3 bobinas en paralelo, lo podemos reducir a:



5.23

Las ecuaciones vistas antes para 3 bobinas, las podemos extender para n bobinas en paralelo:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_n} \tag{3.11}$$

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + \ldots + i_n(t_n) \tag{3.12}$$

5.24

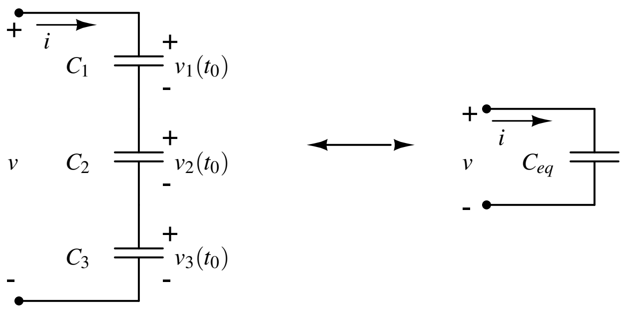
Condensadores en serie

Pero también, podemos reducir los condesadores conectados en serie a uno solo equivalente. El recíproco de la capacidad es la suma de los recíprocos de las capacidades individuales.

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n} \tag{3.13}$$

5.25

Si cada condensador tiene su tensión inicial, en el condensador equivalente corresponderá a la suma algebraica de las tensiones iniciales en los condensadores individuales.

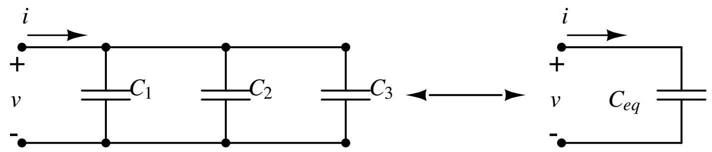


$$v(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0) + v_3(t_0) + \ldots + v_n(t_0) \tag{3.14}$$

5.26

Condensadores en paralelo

La capacidad equivalente para condensadores conectados en paralelo consiste en la suma algebraica de las capacidades de los condensadores individuales.



$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n \tag{3.15}$$

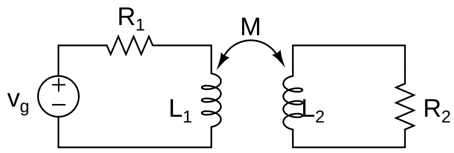
Los condensadores en paralelo deben tener la misma tensión. Por tanto, si existe una tensión inicial en los condensadores en paralelo originales, esta misma tensión aparece en la capacidad equivalente. 5.27

4. Inductancia mútua

Inductancia mútua

La inductancia es el parámetro que relaciona una tensión con una corriente variable en el tiempo en el mismo circuito; por tanto, a la inductancia también se la conoce como autoinductancia.

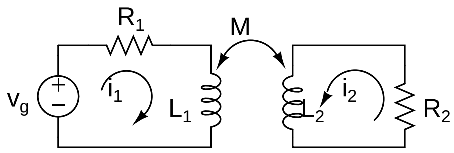
Consideremos dos circuitos que se enlazan por medio de un campo magnético. Entonces, la tensión que se induce en el segundo circuito se puede relacionar con la corriente variable en el tiempo en el primer circuito por medio de un parámetro que es la **inductancia mútua**.



En el circuito, hay dos bobinas conectadas magnéticamente. 5.28

Las autoinductancias de las dos bobinas se indican como L_1 y L_2, y la inductancia mútua como M. La flecha de doble punta representa el par de bobinas con inductancia mútua.

La forma más sencilla de analizar circuitos con inductancia mútua es a través del método de corrientes de malla. El problema consiste en escribir las ecuaciones del circuito que lo describen en términos de las corrientes de las bobinas.

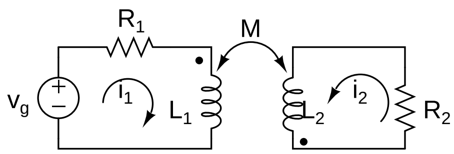


Primero, se elige la dirección de referencia para cada corriente de bobina. 5.29

Después, tras elegir las direcciones de referencia para i_1 e i_2, se suman las tensiones alrededor de cada trayectoria cerrada.

Debido a la inductancia mútua (M) tenemos dos tensiones en cada bobina: una **tensión autoinducida** y una **tensión inducida mútuamente**. La **tensión autoinducida** es el producto de la autoinductancia de la bobina y la primera derivada de la corriente en la misma. La **tensión inducida mútuamente** corresponde al producto de la inductancia mútua de las bobinas y la primera derivada de la corriente en la otra bobina. Consideramos la bobina de la izquierda, cuya autoinductancia es L_1. La tensión autoinducida es $L_1(\frac{di_1}{dt})$ y la inducida mútuamente en la misma bobina es $M(\frac{di_2}{dt})$. 5.30

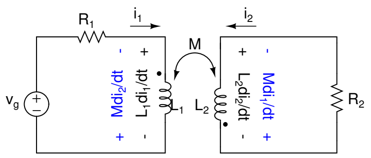
Usando la convención pasiva de signos, la tensión autoinducida es una caída de tensión en la dirección de la corriente que la produce. La polaridad de la tensión inducida mútuamente depende de la forma en que se devanan las bobinas con respecto a la dirección de referencia de las corrientes de la bobina. En general, es complicado mostrar los devanados acoplados mútuamente. En su lugar haremos el seguimiento de las polaridades mediante la convención del punto, en la que se pone un punto en un terminal de cada devanado.



5.31

Estos puntos llevan la información del signo de las tensiones inducidas y permiten dibujar las bobinas esquemáticamente. La regla para usar la convención del punto para determinar la polaridad de la tensión inducida mútuamente, puede resumirse así: Cuando la dirección de referencia para una corriente entra en la terminal con punto de una bobina, la polaridad de referencia de la tensión que ella induce en la otra bobina es positiva en este terminal con punto. Dicho de otra manera: Cuando la dirección de referencia para una corriente sale de la terminal con punto de una bobina, la polaridad de referencia de la tensión que ella induce en la otra bobina es negativa en este terminal con punto. Normalmente, las marcas de punto vendrán dadas pero si no, para hallarlas habrá que examinar la configuración física de un circuito real o probándolo en el laboratorio. 5.32

En el circuito, la regla de convención del punto indica que la polaridad de referencia para la tensión inducida en la bobina 1 por la corriente i_2 es negativa en la terminal con punto de la bobina 1. Esta tensión ($M\frac{di_2}{dt}$) corresponde a un aumento con respecto a i_1. La tensión inducida en la bobina 2 por la corriente i_1 es $M\frac{di_1}{dt}$ y, su polaridad de referencia es positiva en la terminal con punto de la bobina 2. Corresponde a un aumento de tensión en la dirección de i_2.



5.33

Consideramos la suma de tensiones alrededor de cada lazo cerrado. En estas ecuaciones, los aumentos de tensión en la dirección de referencia de una corriente resultan negativos.

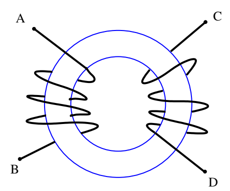
$$-v_g + i_1R_1 + L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} = 0 \tag{4.1}$$

$$i_2R_2 + L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt} = 0 \tag{4.2}$$

5.34

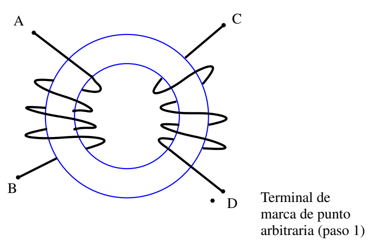
Búsqueda de las marcas de punto

Existen dos métodos para determinar las marcas de punto. El primer método supone que se conoce el arreglo físico de las dos bobinas y el modo de cada devanado en un circuito acoplado magnéticamente.



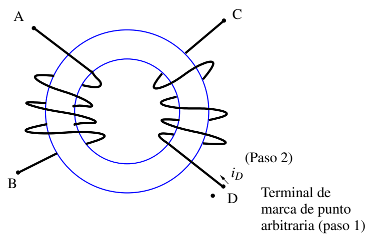
5.35

Se selecciona arbitrariamente una terminal, en este caso, la terminal D, de una bobina y se marca con un punto.



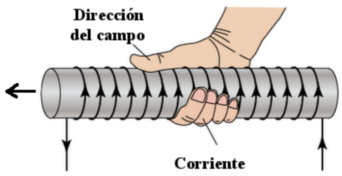
5.36

Se asigna una corriente en la terminal con punto y se marca como i_D.



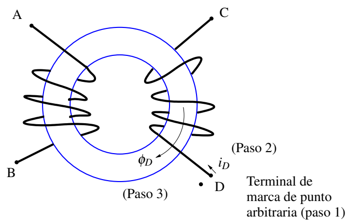
5.37

Regla de la mano derecha



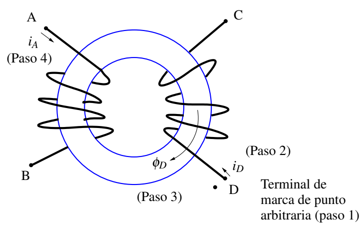
5.38

Se utiliza la regla de la mano derecha para determinar la dirección del campo magnético establecido por i_D dentro de las bobinas acopladas y se designa como ϕ_D.



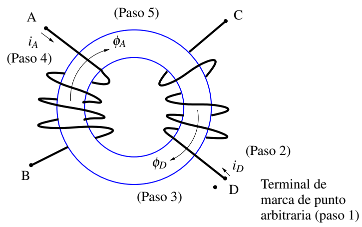
5.39

Escogemos arbitrariamente una terminal de la segunda bobina (terminal A) y se le asigna una corriente i_A.



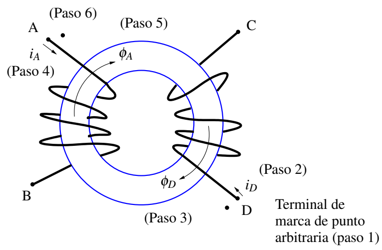
5.40

Por la regla de la mano derecha, determinamos la dirección del flujo que establece i_A dentro de las bobinas acopladas y, se llama ϕ_A.



5.41

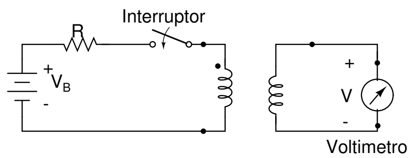
Se comparan las direcciones de los flujos ϕ_D y ϕ_A. Si los flujos tienen la misma dirección de referencia, se pone un punto en el terminal de la segunda bobina donde entra la corriente de prueba (i_A). Si los flujos tienen diferentes direcciones de referencia, se coloca un punto en el terminal de la segunda bobina donde la corriente de prueba sale.



5.42

También, podemos determinar de forma experimental las polaridades relativas de bobinas acopladas magnéticamente. Esto es importante, porque a veces es imposible saber como se devanaron las bobinas en el núcleo. 5.43

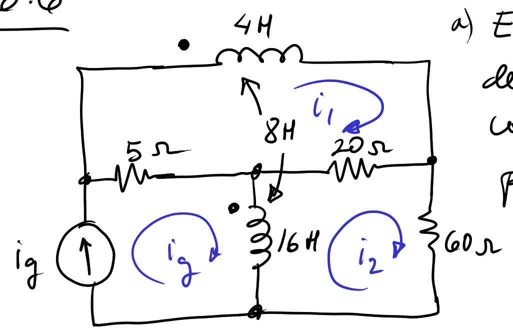
Este método alternativo consiste en conectar a una fuente de tensión de continua una resistencia, un interruptor y un voltímetro en un par de bobinas.



La resistencia R limita la magnitud de la corriente que alimenta la fuente de tensión de continua. El terminal de la bobina conectado al positivo de la fuente de tensión constante por medio del interruptor y de la resistencia limitadora recibe una marca de polaridad (punto). 5.44

Al cerrar el interruptor, se observa la desviación de la aguja del voltímetro. Si la desviación está en la escala positiva, el terminal de la bobina conectado al positivo del voltímetro se marca con un punto. Si la desviación está en la escala negativa, se pone el punto en el terminal conectado al negativo del voltímetro. 5.45

Ejemplo 6.6



a) Escribir un conjunto de ecuaciones de corrientes de malla para i_1 e i_2.

Para i_1

$$4\frac{di_1}{dt}+8\frac{d}{dt}(i_g-i_2)+20(i_1-i_2)+5(i_1-i_g)=0$$

Para i_2

$$20(i_2-i_1)+60i_2+16\frac{d}{dt}(i_2-i_g)-8\frac{di_1}{dt}=0$$

b) Comprobar la validez si no hay energía almacenada en $t=0$ y si $i_g=16-16e^{-5t}$, las soluciones para i_1 e i_2 son:

$$i_1=4+64e^{-5t}-68e^{-4t}\ A$$
$$i_2=1-52e^{-5t}+51e^{-4t}\ A$$

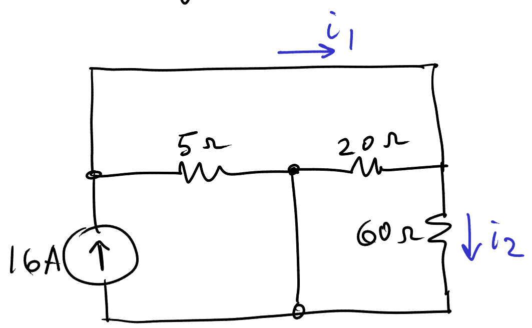
Empezamos por comprobar los valores iniciales: Sabemos por hipótesis que $i_1(0)$ e $i_2(0)$ son cero.

$$\left.\begin{array}{l} i_1(0)=4+64-68=0 \\ i_2(0)=1-52+51=0 \end{array}\right\}\text{ se cumple.}$$

Ahora se observan los valores finales

Cuando $t \to \infty$

$i_g(\infty) = 16A$, $i_1(\infty) = 4A$ e $i_2(\infty) = 1A$



Circuito en $t \to \infty$

Las tres resistencias están en paralelo.

$R_{eq} = 3,75$

$V = 60\,V$

$i_1(\infty) = \frac{60}{20} + \frac{60}{60} = 4A$

$i_2(\infty) = \frac{60}{60} = 1A$

Cumplen las soluciones del enunciado.

Coeficiente de acoplamiento

El coeficiente de acoplamiento k mide cómo están de acoplados los campos magnéticos en un transformador. Además, $k = M/\sqrt{L_1 L_2}$. El valor de k es menor que 1 y varía entre 0 y 1 ($0 \leq k \leq 1$). El coeficiente de acoplamiento es 0, cuando las dos bobinas no tienen flujo común; es decir, $\phi_{12} = \phi_{21} = 0$. Esta condición implica que la permeancia magnética (el grado con el que un material admite el flujo de energía) $\mathscr{P}_{12} = 0$, y la ecuación

$$\frac{1}{k^2} = \left(1 + \frac{\mathscr{P}_{11}}{\mathscr{P}_{12}}\right) \cdot \left(1 + \frac{\mathscr{P}_{22}}{\mathscr{P}_{12}}\right) \tag{4.3}$$

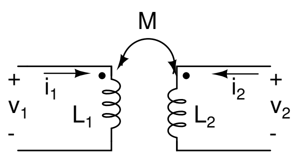
indica que $\frac{1}{k^2} = \infty$. 5.46

Si no hay enlace de flujo entre las bobinas, entonces M es 0. El coeficiente de acoplamiento es 1 cuando ϕ_{11} y ϕ_{22} son 0. Esta condición implica que la totalidad del flujo que enlaza a la bobina 1 hace lo propio con la bobina 2. Según la ecuación anterior, $\mathscr{P}_{11} = \mathscr{P}_{22} = 0$; lo que representa un estado ideal; ya que devanar las dos bobinas de forma que compartan el mismo flujo, es físicamente imposible. 5.47

Los materiales magnéticos (aleaciones de hierro, cobalto y níquel) crean un espacio con alta permeancia y se usan para establecer coeficientes de acoplamiento cercanos a la unidad. 5.48

Cálculos de energia

Supongamos el siguiente circuito:



Utilizamos este circuito para calcular la energía total almacenada en los campos magnéticos asociados con un par de bobinas acopladas linealmente. Supongamos que las corrientes i_1 e i_2 son 0 y, que este estado de corriente 0 corresponde a la energía almacenada 0 en las bobinas. 5.49

En ese caso, se deja que i_1 aumente desde 0 hasta algún valor arbitrario I_1 y se calcula la energía almacenada cuando $i_1 = I_1$. Debido a que i_2 = 0, la entrada de potencia total en el par de bobinas es $v_1 i_1$ y la energía almacenada es:

$$\int_0^{W_1} dw = L_1 \int_0^{I_1} i_1\, di_1 \tag{4.4}$$

$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 \tag{4.5}$$

Después de esto, se mantiene i_1 constante en I_1 y se incrementa i_2 desde 0 hasta algún valor arbitrario I_2. 5.50

Durante este intervalo, la tensión inducida en la bobina 2 por i_1 es 0, puesto que I_1 es constante. La tensión que se induce en la bobina 1 por i_2 es $M_{12}\frac{di_2}{dt}$. Por tanto, la entrada de potencia al par de bobinas es:

$$p = I_1 M_{12} \frac{di_2}{dt} + i_2 v_2 \tag{4.6}$$

La energía total que se almacena en el par de bobinas cuando $i_2 = I_2$ es:

$$\int_{W_1}^{W} dw = \int_0^{I_2} I_1 M_{12}\, di_2 + \int_0^{I_2} L_2 i_2\, di_2 \tag{4.7}$$

5.51

Esto se puede escribir también así:

$$W = W_1 + I_1 I_2 M_{12} + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + I_1 I_2 M_{12} \tag{4.8}$$

Si invertimos el procedimiento, es decir, si incrementamos primero i_2, desde 0 hasta I_2 y, luego aumenta i_1, desde 0 hasta I_1, la energía total almacenada es:

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + I_1 I_2 M_{21} \tag{4.9}$$

Estas ecuaciones muestran la energía total almacenada en un par de bobinas acopladas linealmente como una función de las corrientes de bobina, las autoinductancias y la inductancia mútua. 5.52

Cuando el medio de acoplamiento es lineal, la energía total almacenada es la misma, independientemente del orden utilizado para establecer I_1 e I_2. La razón es que en un acoplamiento lineal, el flujo magnético resultante depende sólo de los valores finales de i_1 e i_2, no de como las corrientes alcanzan sus valores finales. 5.53

El flujo resultante es el mismo, la energía que se almacena es la misma. Por tanto, en el acoplamiento lineal, $M_{12} = M_{21} = M$. Además, como I_1 e I_2 son valores arbitrarios de i_1 e i_2, respectivamente, se representan las corrientes de bobinas por medio de sus valores instantáneos i_1 e i_2. De esta forma, en cualquier instante de tiempo, la energía acoplada en las bobinas es:

$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \tag{4.10}$$

Esta ecuación se obtiene suponiendo que ambas corrientes de bobina entran en las terminales con polaridad marcada. 5.54

Por ello, en general:

$$w(t) = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2 \tag{4.11}$$

Con esta ecuación se demuestra que M no puede superar $\sqrt{L_1 L_2}$. Las bobinas acopladas magnéticamente son elementos pasivos, por lo que la energía total almacenada nunca puede ser negativa. Si w(t) nunca puede ser negativa, entonces:

$$\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 - M i_1 i_2 \tag{4.12}$$

debe ser mayor o igual que 0, cuando i_1 e i_2 son ambas positivas o negativas. 5.55

El valor límite de M corresponde a fijar la cantidad igual a 0:

$$\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 - M i_1 i_2 = 0 \tag{4.13}$$

Para calcular el valor límite de M, se suma y se resta el término $i_1 i_2 \sqrt{L_1 L_2}$ en el lado izquierdo de la ecuación y así, se genera un término que es un cuadrado perfecto:

$$\left(\sqrt{\frac{L_1}{2}} i_1 - \sqrt{\frac{L_2}{2}} i_2\right)^2 + i_1 i_2 \left(\sqrt{L_1 L_2} - M\right) = 0 \tag{4.14}$$

El término de la ecuación nunca puede ser negativo aunque puede ser 0. Por consiguiente, $w(t) \geq 0$, sólo si $\sqrt{L_1 L_2} \geq M$, o también, $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ $(0 \leq k \leq 1)$. 5.56