Mecánica - Elementos Básicos

Date: June, 2017

Actividad: Literature Review	**WBS - (Resorte)**

1. **Resnick** (353)
2. **Ogata**
3. **Kuo**

Como un ejemplo de una fuerza variable, consideremos un resorte que actúe sobre una partícula de masa m (Fig. 8). La partícula se mueve en dirección horizontal, la cual tomamos que sea la dirección x, con el origen ($x = 0$) representando la posición de la partícula cuando el resorte está relajado (Fig. 8*a*). Sobre la partícula actúa una fuerza externa F_{ext} en dirección opuesta a la fuerza del resorte. Suponemos que la fuerza externa es siempre aproximadamente igual a la fuerza del resorte, de modo que la partícula esté en equilibrio en todo momento ($a = 0$).

Sea desplazada la partícula una distancia x desde su posición original en $x = 0$ (Fig. 8*b*). Si el agente externo ejerce una fuerza F_{ext} sobre la partícula, el resorte ejercerá una fuerza opuesta F_s. Esta fuerza está dada con bastante aproximación por

1.
$$F_s = -kx, \tag{8}$$

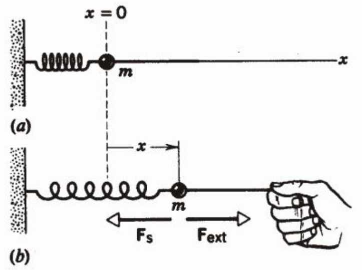


Figura 8 (*a*) Una partícula de masa m está unida a un resorte, el cual está en la posición relajada. (*b*) La partícula se desplaza una distancia x, donde hay dos fuerzas que actúan sobre ella, la fuerza de restitución del resorte y el jalón de un agente externo.

donde k es una constante positiva, llamada la *constante de fuerza* del resorte. La constante k es una medida de la fuerza necesaria para producir un estiramiento determinado del resorte; los resortes más rígidos tienen los valores de k mayores. La ecuación 8 es la *ley de la fuerza* para los resortes, y se la conoce como *ley de Hooke*. El signo menos en la ecuación 8 nos advierte que la dirección de la fuerza ejercida por el resorte se opone siempre a la dirección del desplazamiento de la partícula. Cuando el resorte se estira, $x > 0$ y F_s es negativa; cuando el resorte se comprime, $x < 0$ y F_s es positiva. La fuerza ejercida por el resorte es una *fuerza de restitución*: tiende siempre a *restablecer* a la partícula a su posición en $x = 0$. Los resortes más reales obedecen a la ecuación 8 razonablemente bien siempre y cuando no los estiremos más allá de una cantidad límite.

15-1 SISTEMAS OSCILATORIOS

Imaginemos un sistema que oscila, como el péndulo de un reloj o una masa suspendida de un resorte. ¿Cuáles deben ser las propiedades de la fuerza que produzca tales oscilaciones?

Si desplazamos a un péndulo en una dirección desde su posición de equilibrio, la fuerza (debida a la gravedad) impulsa de regreso hacia su posición de equilibrio. Si lo desplazamos en la otra dirección, la fuerza sigue actuando hacia la posición de equilibrio. *No importa cuál sea la dirección del desplazamiento, la fuerza siempre actúa en una dirección que restituye al sistema a su posición de equilibrio.* Esta fuerza recibe el nombre de *fuerza de restitución*. (La posición de equilibrio pertenece a la clase que llamamos *estable* en el capítulo 14; el sistema tiende a regresar al equilibrio cuando se le desplaza ligeramente.)

Consideremos un ejemplo sencillo. Supongamos que tenemos una partícula que puede moverse libremente sólo en la dirección x, y hagamos que la partícula experimente una fuerza de magnitud constante F_m que actúe en la dirección $+x$ cuando $x < 0$ y en la dirección $-x$ cuando $x > 0$, como se muestra en la figura 1*a*. La fuerza, que se muestra en la figura 1*b*, es similar a las fuerzas seccionalmente constantes que consideramos en el capítulo 2.

Una partícula de masa m en la coordenada $x = +x_m$ experimenta una fuerza cuya componente x es $-F_m$, y la componente correspondiente x de la aceleración de la partícula es $-a_m = -F_m/m$. La partícula se mueve hacia su posición de equilibrio en $x = 0$ y llega a esa posición con una velocidad $v = -v_m$. Cuando pasa por el origen a la x negativa, la fuerza se convierte en $+F_m$, y la aceleración es $+a_m$. La partícula pierde velocidad y llega al reposo por un instante en $x = -x_m$ antes de invertir su movimiento a través del origen y regresar eventualmente a $x = +x_m$. En ausencia de la fricción y de otras fuerzas disipativas, el ciclo se repite una y otra vez.

La figura 2 muestra una gráfica del movimiento resultante, trazada al estilo de los ejemplos considerados en el capítulo 2. La posición *x(t)* consta de una secuencia de segmentos de parábola unidos suavemente, como es siempre el caso del movimiento con aceleración constante. La partícula oscila yendo y viniendo entre $x = +x_m$ y $x = -x_m$. La magnitud del desplazamiento máximo desde el equilibrio (x_m en este caso) se llama *amplitud* de movimiento. El tiempo necesario para un ciclo completo (una repetición completa del movimiento) se llama *periodo T*, como se indica en la figura 2*a*. El número de ciclos por unidad de tiempo recibe el nombre de *frecuencia* ν. La frecuencia y el periodo son recíprocos entre sí:

$$\nu = 1/T. \tag{1}$$

El periodo se mide en unidades de tiempo (segundos, por ejemplo), mientras que la frecuencia se mide en una unidad SI: el hertz (Hz),* donde 1 Hz = 1 ciclo/s. Entonces, por ejemplo, una oscilación con un periodo de $T = 5$ s tiene una frecuencia $\nu = 0.2$ Hz.

Hasta ahora hemos usado una descripción dinámica de la oscilación, pero a menudo es conveniente una descripción en función de la energía. La figura 1*c* muestra la energía potencial que corresponde a la fuerza de la figura 1*b*. Nótese que, como se indica con la expresión $F = -dU/dx$, el negativo de la pendiente de $U(x)$ da la fuerza. La energía

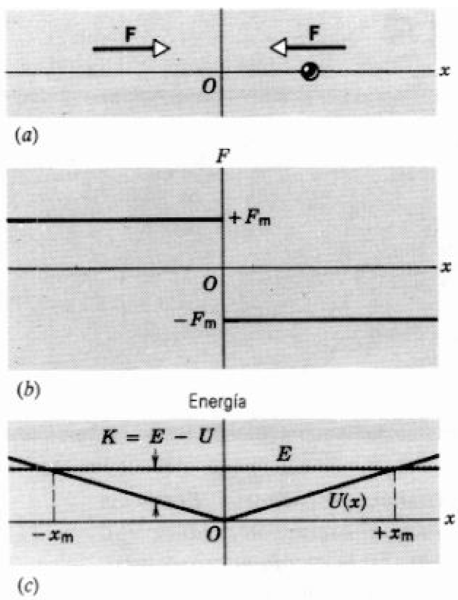


Figura 1 (*a*) Una fuerza constante **F** que está siempre dirigida hacia el origen actúa sobre una partícula. (*b*) Diagrama de esta fuerza seccionalmente constante, igual a $+F_m$ cuando $x < 0$ y a $-F_m$ cuando $x > 0$. Cualquier fuerza real de este tipo debe estar representada por una función continua, aun cuando pueda ser de pendiente muy grande al pasar por $x = 0$. (*c*) La energía potencial que corresponde a esta fuerza. Si el sistema tiene una energía mecánica total E, entonces la diferencia $E - U$ da la energía cinética en cualquier posición.

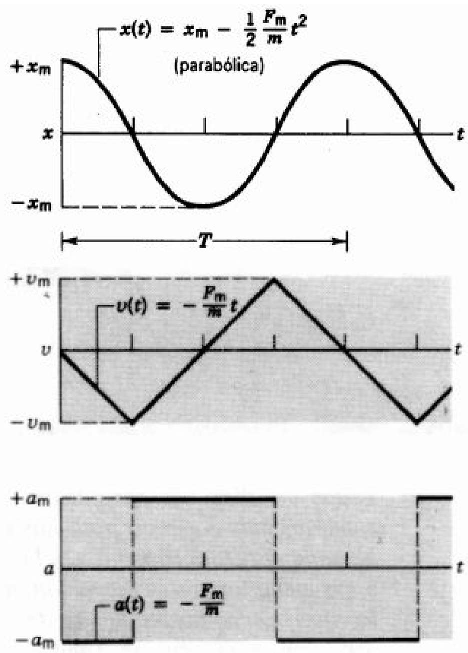


Figura 2 La posición, la velocidad, y la aceleración de la partícula de la figura 1 graficadas en función del tiempo. La aceleración consta de segmentos horizontales alternativos con valores $+F_m/m$ y $-F_m/m$; la velocidad consta de segmentos lineales alternativos con pendientes $+F_m/m$ y $-F_m/m$, y la posición consista de secciones de parábola unidas suavemente. Puesto que la fuerza *F(x)* es en realidad una función continua, *a(t)* es también continua, teniendo los segmentos horizontales uniones muy empinadas. Además, los picos agudos de v(t) están redondeados. Sin embargo, las

mecánica $E = K + U$ permanece constante en un sistema aislado. En cada punto, la diferencia $E - U$ da la energía cinética K en ese punto. Si extendemos la gráfica a desplazamientos suficientemente grandes, eventualmente llegaríamos a posiciones en las que $E = U$ y entonces $K = 0$. En estos puntos, como lo muestra la figura 2, la velocidad es cero y la posición es $x = \pm x_m$. Estos puntos se llaman los *puntos de retorno* del movimiento.

Las figuras 1*b* y 1*c* ilustran dos maneras equivalentes de describir las condiciones de la oscilación: la fuerza debe actuar siempre para restituir la partícula al equilibrio, y la energía potencial debe tener un mínimo en la posición de equilibrio.

Siempre agrada trabajar con el caso de la aceleración constante, porque la matemática es sencilla, pero rara vez constituye una descripción precisa de la naturaleza. La figura 3*a* muestra un ejemplo de una fuerza más realista que puede producir un movimiento oscilatorio. Tal fuerza es la causa del enlace de las moléculas que contienen dos átomos. La fuerza aumenta rápidamente si tratamos de empujar a un átomo más cerca del otro; su componente

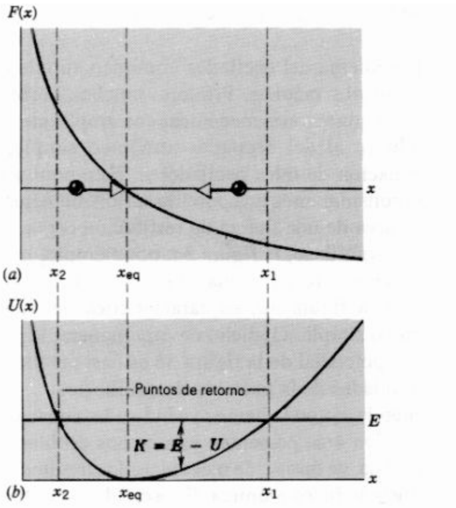


Figura 3 (*a*) La fuerza que actúa sobre una partícula que oscila entre los límites x_1 y x_2. Nótese que la fuerza tiende siempre a empujar a la partícula hacia su posición de equilibrio, como en la figura 1. Tal fuerza puede actuar sobre un átomo en una molécula. (*b*) La energía potencial correspondiente a esta fuerza.

15-2 EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE

El movimiento de una partícula en un sistema complejo, como el átomo de la molécula en vibración tratado en la sección anterior, es más fácil de analizar si consideramos que el movimiento es una superposición de oscilaciones *armónicas*, las cuales pueden describirse en términos de funciones seno y coseno.

Consideremos un sistema oscilatorio consistente en una partícula sometida a una fuerza

$$F(x) = -kx, \tag{2}$$

donde k es una constante y x es el desplazamiento de la partícula a partir de su posición de equilibrio. Tal sistema oscilatorio recibe el nombre de *oscilador armónico simple*, y su movimiento se llama *movimiento armónico simple*. La energía potencial que corresponde a esta fuerza es

$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2. \tag{3}$$

La fuerza y la energía potencial están, por supuesto, relacionadas por $F(x) = -dU/dx$. Como vimos por la ecuación 2 y como podemos apreciar en la gráfica de la figura 4*a*, la fuerza que actúa sobre la partícula es directamente proporcional al desplazamiento pero opuesta a él en dirección. La ecuación 3 muestra que la energía potencial varía con el cuadrado del desplazamiento, como lo ilustra la curva parabólica de la figura 4*b*.

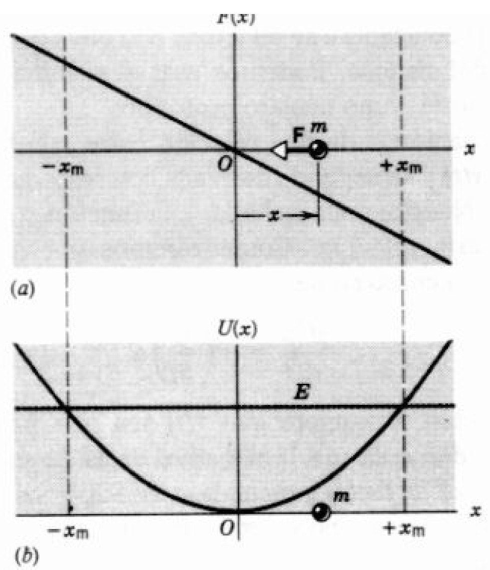


Figura 4 (*a*) La fuerza y (*b*) la energía potencial correspondiente de un oscilador armónico simple. Nótense las similitudes y las diferencias con la figura 3.

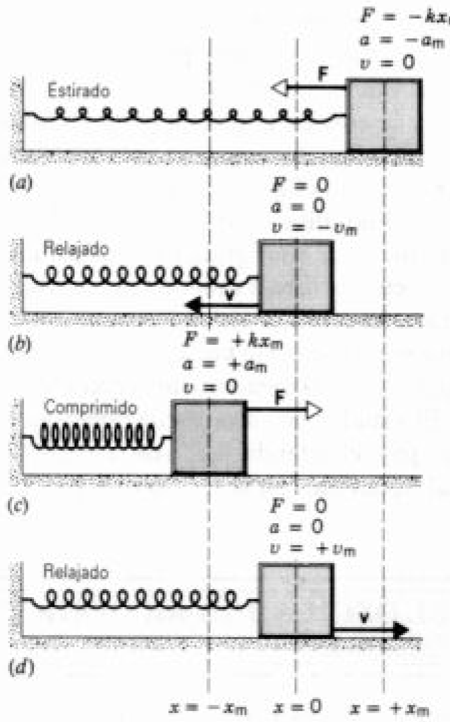


Figura 5 Oscilador armónico simple, consistente en un resorte que actúa sobre un cuerpo que se desliza en una superficie horizontal sin fricción. En (*a*), el resorte se estira de modo que el cuerpo tenga su desplazamiento máximo a partir del equilibrio. En (*c*) el resorte está totalmente comprimido. En (*b*) y (*d*), el cuerpo pasa por la posición de equilibrio con velocidad máxima y con el resorte relajado.

Apliquemos la segunda ley de Newton, $F = ma$, al movimiento de la figura 5. Sustituimos a F por $-kx$ y en vez de la aceleración a ponemos d^2x/dt^2 ($= dv/dt$). Esto nos da

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

o sea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \qquad (4)$$

La ecuación 4 recibe el nombre de *ecuación del movimiento* del oscilador armónico simple. Su solución, la cual describiremos en la siguiente sección, es una función $x(t)$ que describe la posición del oscilador en función del tiempo, en analogía con la figura 2*a*, la cual representa la variación de la posición con el tiempo de un oscilador diferente.

El problema del oscilador armónico simple es importante por dos razones. Primera, muchos problemas que implican vibraciones mecánicas con amplitudes pequeñas se reducen al del oscilador armónico simple, o a una combinación de tales osciladores. Esto equivale a decir que si consideramos una porción suficientemente pequeña de la curva de una fuerza de restitución cerca de la posición de equilibrio, la figura 3*a*, por ejemplo, resulta arbitrariamente cercana a una línea recta, la cual, como lo muestra la figura 4*a*, es característica del movimiento armónico simple. O, dicho de otra manera, la curva de la energía potencial de la figura 3*b* es casi parabólica en las proximidades de la posición de equilibrio.

Segunda, como lo hemos ya indicado, ecuaciones como la ecuación 4 se presentan en muchos problemas físicos de acústica, de óptica, de mecánica, de circuitos eléctricos, e incluso de física atómica. El oscilador armónico simple exhibe características comunes a muchos sistemas físicos.

La ecuación 4 da una relación entre una función del ·mpo $x(t)$ y su segunda derivada con respecto al tiempo, $\cdot x/dt^2$. Nuestra meta es hallar una función $x(t)$ que satisga a esta relación. Comenzaremos por reescribir la ·uación 4 como sigue:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x. \qquad (5)$$

Escribimos una solución tentativa de la ecuación 5 como:

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi). \qquad (6)$$

Aquí, puesto que

$$x_m \cos(\omega t + \phi) = x_m \cos\phi \cos\omega t - x_m \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\omega t$$
$$= a\cos\omega t + b \operatorname{sen}\omega t,$$

permitiéndonos la constante ϕ cualquier combinación de soluciones seno y coseno.

Con las constantes (todavía) desconocidas x_m, ω, y ϕ, hemos escrito una solución de la ecuación 5 en la forma más general posible. Para determinar estas constantes de modo que la ecuación 6 sea realmente la solución de la ecuación 5, diferenciamos a la ecuación 6 dos veces con respecto al tiempo. Tenemos que

$$\frac{dx}{dt} = -\omega x_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

y

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi).$$

Poniendo esto en la ecuación 5, obtenemos

$$-\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) = -\frac{k}{m}x_m \cos(\omega t + \phi).$$

Por lo tanto, si elegimos a la constante ω de modo que

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \qquad (7)$$

entonces la ecuación 6 es, de hecho, una solución de la ecuación del movimiento de un oscilador armónico simple.

Elementos de un resorte. Un *resorte* lineal es un elemento mecánico que puede ser deformado por una fuerza externa tal que la deformación sea directamente proporcional a la fuerza o par que se le aplique.

La Fig. 2-3 es un diagrama esquemático de un resorte. Aquí considera-
2. mos solamente el movimiento traslacional. El resorte ha sido deflectado de su posición original por una fuerza aplicada en cada extremo. Las posiciones x_1 y x_2 de los extremos del resorte se han medido en relación con el mismo marco de referencia. Las fuerzas en ambos extremos del resorte están en la misma línea y son de igual magnitud. Por lo tanto, la fuerza F y el desplazamiento neto x de los extremos del resorte están relacionados por

$$F = kx = k(x_1 - x_2) \tag{2-3}$$

donde k es una constante de proporcionalidad llamada *constante del resorte*. La dimensión de la constante del resorte k es fuerza/desplazamiento.

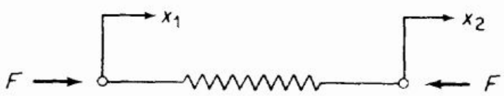


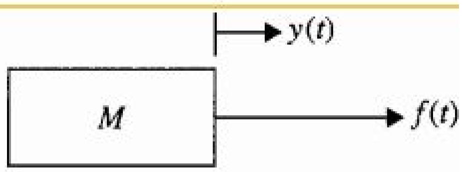
Fig. 2-3. Resorte.

2. Resorte lineal. En la práctica, un resorte lineal puede ser un modelo de un resorte
3. eal o la compliancia de un cable o una banda. En general, *un resorte está considerado como: un elemento que almacena energía potencial.* Es análogo a un capacitor en un circuito eléctrico. Todos los resortes en la vida real son, de alguna manera, no lineales. Sin embargo, si la deformación del resorte es pequeña, su comportamiento se puede aproximar por la relación lineal:

$$f(t) = Ky(t) \tag{4-17}$$

en donde K es la **constante del resorte,** o simplemente **rigidez.**

Figura 4-3 Sistema fuerza-masa.



Los dos sistemas de unidades básicas para la constante del resorte son los siguientes:

Unidades	Constante del resorte K
SI	N/m
Británicas	lb/pies

La ecuación (4-17) implica que la fuerza que actúa sobre el resorte es directamente proporcional al desplazamiento (deformación) del resorte. Un modelo de un elemento de resorte lineal se presenta en la Fig. 4-4. Si el resorte es precargado con una tensión T, la ecuación (4-17) se debe modificar a:

$$f(t) - T = Ky(t) \tag{4-18}$$