Mecánica - Elementos Básicos

Date: July, 2017,

Actividad: Literature Review	**WBS - (Amortiguador)**

1. **Resnick** (368)
2. **Ogata** (32)
3. **Kuo** (163)

15-8 MOVIMIENTO ARMÓNICO AMORTIGUADO *(Opcional)*

Hasta este momento hemos supuesto que no actúan fuerzas de fricción sobre el oscilador. Si esta hipótesis se mantuviese estrictamente, un péndulo o una masa unida a un resorte oscilarían de manera indefinida. En realidad, la amplitud de la oscilación disminuye en forma gradual hasta cero como resultado de la fricción. Se dice que el movimiento está *amortiguado* por la fricción y se le llama *movimiento armónico amortiguado*. A menudo la fricción surge de la resistencia del aire o de fuerzas internas. En la mayoría de los casos de interés la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad del cuerpo pero directamente opuesta a él. En la figura 18 se muestra un ejemplo de un oscilador amortiguado.

La fuerza neta sobre el cuerpo oscilatorio es la suma de la fuerza de restitución $-kx$ y la fuerza de amortiguamiento, la cual suponemos tiene la forma de $-bv$ como en el caso de la fuerza de arranque que se consideró en la sección 6-7. Aquí b es una constante positiva, que depende de las propiedades del fluido, como la densidad, y de la forma y dimensiones del objeto

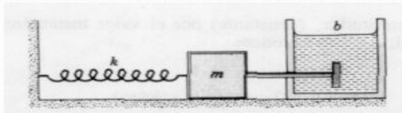

Figura 18 Representación de un oscilador armónico amortiguado. Consideramos que el cuerpo oscilatorio (de masa m) está unido a una tablilla sin masa sumergida en un fluido, donde experimenta una fuerza de amortiguamiento viscoso $-bv$. No consideramos, en cambio, la fricción por deslizamiento en la superficie horizontal.

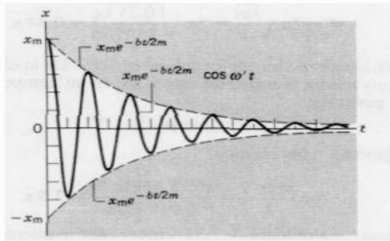

Figura 19 Movimiento armónico amortiguado. El desplazamiento x se grafica contra el tiempo t considerando que la constante de fase ϕ sea 0. El movimiento es oscilatorio, pero la amplitud disminuye exponencialmente con el tiempo.

1.

sumergido. Partiendo de la segunda ley de Newton en la forma $\Sigma F = ma$, obtenemos

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

o sea

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0. \qquad (37)$$

Una solución de esta ecuación (ofrecida aquí sin prueba; véase el problema 63 para su verificación)* es

$$x = x_m e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi), \qquad (38)$$

donde

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \qquad (39)$$

Esta forma de solución de la ecuación 37 es válida para constantes b de amortiguamiento que sean lo suficientemente pequeñas de modo que la cantidad en el radical de la ecuación 39 sea positiva. En la figura 19 se traza el desplazamiento x en función del tiempo t en este caso.

Existen dos características notables de esta solución. Primeramente, la frecuencia es más pequeña (y el periodo más largo) cuando está presente la fricción. La fricción retarda al movimiento, como cabe esperar. Si no hubiese fricción presente, b sería igual a cero y ω' sería igual a $\sqrt{k/m}$, que es la frecuencia angular ω de un movimiento no amortiguado. Cuando la fric-

En segundo lugar, la amplitud del movimiento, representada en la ecuación 38 por el factor $x_m e^{-bt/2m}$ y en la figura 19 por las curvas de puntos, disminuye exponencialmente hasta cero. El intervalo de tiempo τ durante el cual la amplitud cae a $1/e$ de su valor inicial se llama *vida media* de la oscilación. El factor exponencial en la ecuación 38 tendrá el valor e^{-1} cuando $t = \tau = 2m/b$. Una vez más, si no hubiese fricción presente, b sería igual a cero y la amplitud tendría el valor constante x_m al pasar el tiempo; la vida media sería infinita.

Las ecuaciones 38 y 39 sólo son válidas para $b \le 2\sqrt{km}$. Si b tiene su mayor valor posible en este intervalo ($b = 2\sqrt{km}$), entonces $\omega' = 0$, y el desplazamiento tiende a cero exponencialmente sin oscilación. La vida media τ tiene su valor más pequeño, el cual puede demostrarse que es igual a ω^{-1}, o sea, el inverso de la frecuencia angular de la oscilación no amortiguada. Esta condición, llamada *amortiguamiento crítico*, es a menudo la meta de los ingenieros mecánicos al diseñar un sistema en el que las oscilaciones desaparezcan en el menor tiempo posible.

Elementos amortiguadores. Un *amortiguador* es un elemento mecánico que disipa energía en forma de calor en lugar de almacenarla. La figura

2-5(a) muestra un diagrama esquemático de un amortiguador traslacional. Consiste en un pistón y un cilindro lleno de aceite. Cualquier movimiento relativo entre el vástago del pistón y el cilindro encuentra resistencia por el aceite ya que éste debe fluir alrededor del pistón (o a través de orificios provistos en el pistón) de un lado a otro. Esencialmente, el amortiguador absorbe energía y la energía absorbida se disipa como calor que fluye al ambiente.

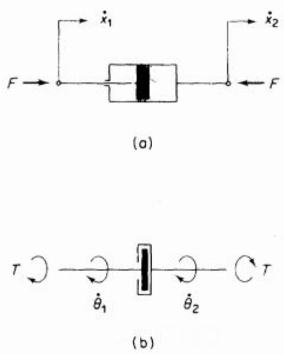

Fig. 2-5. (a) amortiguador traslacional; (b) amortiguador torsional (o rotacional).

En la Fig. 2-5(a) las velocidades $\dot{x}_1$ y $\dot{x}_2$ se consideran relativas al mismo marco de referencia. Las fuerzas en los extremos del amortiguador traslacional están en la misma línea y son de igual magnitud. En el amortiguador, la fuerza F que actúa sobre él es proporcional a la diferencia de velocidad $\dot{x}$ de ambos extremos o

$$F = b\dot{x} = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \tag{2-5}$$

donde la constante de proporcionalidad b que relaciona la fuerza externa F y la diferencia de velocidad $\dot{x}$ se denomina *coeficiente de fricción viscosa* o *constante de fricción viscosa*. La dimensión del coeficiente de fricción viscosa es fuerza/velocidad. Nótese que las posiciones iniciales de ambos extremos del amortiguador no aparecen en la ecuación.

Para el amortiguamiento de torsión o rotacional mostrado en la Fig. 2-5(b), el par aplicado a los extremos del amortiguador es proporcional a la diferencia de velocidad angular de ambos extremos o

$$T = b\dot{\theta} = b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \tag{2-6}$$

2.

La dimensión del coeficiente de fricción viscosa de torsión b es par/velocidad angular.

Nótese que un amortiguador es un elemento que provee resistencia en el movimiento mecánico, y como tal, su efecto en el comportamiento dinámico de un sistema mecánico es similar al de un resistor eléctrico en el comportamiento dinámico de un sistema eléctrico. En consecuencia, a menudo se trata de un amortiguador como un *elemento de resistencia mecánica* y al coeficiente de fricción viscosa como a la *resistencia mecánica*.

Resistencia mecánica b (para amortiguador traslacional)

$$= \frac{\text{cambio en la fuerza}}{\text{cambio en la velocidad}} \quad \frac{\text{N}}{\text{m/s}}$$

Resistencia mecánica b (para amortiguadores de torsión)

$$= \frac{\text{cambio en el par}}{\text{cambio en la velocidad angular}} \quad \frac{\text{N}-\text{m}}{\text{rad/s}}$$

Amortiguador práctico contra amortiguador ideal. Todos los amortiguadores prácticos producen efectos de inercia y de resorte. En este libro, sin embargo, suponemos que esos efectos son despreciables.

Un amortiguador ideal está desprovisto de masa y de resorte, disipa toda la energía y obedece a la ley fuerza-velocidad lineal o par-velocidad angular lineal como se dan en la Ec. (2-5) o en la Ec. (2-6), respectivamente.

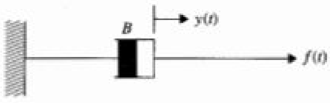

Figura 4-5 Amortiguador para fricción viscosa.

emplean comúnmente en los sistemas prácticos: **fricción viscosa, fricción estática** y **fricción de Coulomb.** Éstas de discutirán a continuación.

1. Fricción viscosa. *La fricción viscosa representa una fuerza que es una relación lineal entre la fuerza aplicada y la velocidad.* A menudo, el esquema del elemento de fricción viscosa se representa como un amortiguador, como el que se muestra en la Fig. 4-5. La expresión matemática de la fricción viscosa es:

$$\boxed{f(t) = B\frac{dy(t)}{dt}} \tag{4-19}$$

en donde B es el **coeficiente de fricción viscosa.**

Las unidades de B son las siguientes:

Unidades	Coeficiente de fricción viscosa B
SI	N/m/s
Británicas	lb/pies/s

La Fig. 4-6 (a) muestra la relación funcional entre la fuerza de fricción viscosa y la velocidad.

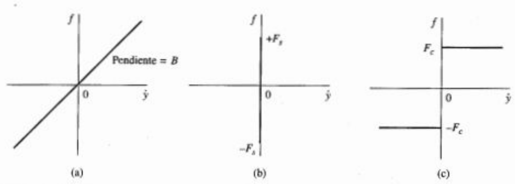

Figura 4-6 Relaciones funcionales de fuerzas de fricción lineal y no lineal. (a) Fricción viscosa. (b) Fricción estática. (c) Fricción de Coulomb.

3.

3. Fricción para movimiento de rotación. Los tres tipos de fricción descritos para el movimiento de traslación se pueden manejar para el movimiento de rotación. De este modo, las ecuaciones (4-19), (4-20) y (4-21) se pueden remplazar, respectivamente, por sus contrapartes:

Fricción viscosa: $$T(t) = B\frac{d\theta(t)}{dt} \tag{4-27}$$

Fricción estática: $$T(t) = \pm(F_s)\big|_{\dot{\theta}=0} \tag{4-28}$$

Fricción de Coulomb: $$T(t) = F_c\frac{d\theta(t)/dt}{|d\theta(t)/dt|} \tag{4-29}$$